

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

NIGGLI, A. und NIGGLI, P.: Raumgruppensymmetrie und Berechnungsmethoden der Kristallstrukturlehre (Schluß) . . . . .	311
GASSMANN, F.: Über Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen und über gedämpfte Schwingungen von Stäben . . . . .	336
LAACK, W.: Charakteristikenverfahren zur näherungsweisen Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung um ringförmige Körper . . . . .	357
LANDSBERG, M.: Zur Theorie und Berechnung des elektrostatischen Durchgriffs der ebenen und zylindrischen Dreipolröhre im Falle zweidimensionaler Potentialverhältnisse . . . . .	375
KLOBE, G.: Der Adiabatenkoeffizient dissoziierender Feuergase bei adiabatisch-isentropischer Entspannung . . . . .	394

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

RICOMI, F.: The Airfoil Equation for a Double Interval . . . . .	402
PROPOULOS, S.: Cavitation Pressures and Damage . . . . .	406

## Varia - Miscellaneous - Divers

weiter Internationaler Kongreß der Union für Kristallographie in Stockholm (P. NIGGLI) . . . .	411
esellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (H. GÖRTLER) . . . . .	412
tratatum . . . . .	412
uchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	412

ZAMP	Vol. II	Fasc. 5	Pag. 311-420	15. 9. 51
------	---------	---------	--------------	-----------

Verlag Birkhäuser Basel / Schweiz

UNIVERSITY OF HAWAII  
LIBRARY  
DEC 10 1951

AI  
37

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 28.-, Ausland Fr. 34.-, Einzelnummer Fr. 6.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 28.-, foreign Fr. 34.-, single copy Fr. 6.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 28.-, étranger Fr. 34.-, le numéro Fr. 6.-

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postales dans les pays suivants:

Belgien, Luxemburg	Dänemark	Schweden	Portugal	Italien
Holland	Norwegen	Finnland	Marokko	Deutschland

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 150.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 80.-,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 45.-

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés

Copyright 1951 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



# Raumgruppensymmetrie und Berechnungsmethoden der Kristallstrukturlehre

VON ALFRED NIGGLI und PAUL NIGGLI, Zürich<sup>1)</sup>

II. Teil<sup>2)</sup>

## 4. Die Strukturfaktoren, Auswahlregeln und die Fourier-Analyse zur Elektronendichtebestimmung

Wie eingangs erwähnt, stellt die Kristallstrukturlehre zunächst zwei Aufgaben:

1. Um den *geometrischen Beitrag* zu bestimmen, den eine durch die Elementarbasis gegebene Teilchenmannigfaltigkeit an die Intensität der einer Netzebene  $(hkl)$  zugeordneten Röntgeninterferenzen leistet, hat man den gesamten Strukturvektor  $\mathfrak{B}$  nach folgendem Verfahren zu ermitteln:

$$\mathfrak{B}_{(hkl)} = \sum_{q=1}^Z \mu_q e^{2\pi i(hx_q + ky_q + lz_q)}. \quad (1)$$

Die Summation erstreckt sich über alle  $Z$  konstituierenden Teilchen;  $\mu_q$  ist das Streuvermögen eines herausgegriffenen Teilchens mit den Koordinaten  $x_q, y_q, z_q$ . Die  $(hkl)$  brauchen keine primitiven Tripel mehr zu bilden, denn ein gemeinsamer Faktor  $m$  drückt die Reflexion  $m$ -ter Ordnung an  $(hkl)$  des primitiven Indizestripels aus.

2. Zur Berechnung der *Elektronendichte* in einem Punkt  $xyz$  des Elementarparallelepipeds dient die Formel

$$\varrho_{xyz} = \frac{1}{E} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{(hkl)} e^{-2\pi i(hx + ky + lz)}. \quad (2)$$

$E$  ist das Volumen des Elementarparallelepipeds. Man hat über alle  $(hkl)$ , die wiederum keine primitiven Tripel zu sein brauchen, zu summieren. Die *Amplituden*  $F_{(hkl)}$  der an  $(hkl)$  reflektierten Strahlung stehen in Beziehung zur Belastung eines Elementarparallelogramms mit Elektronen; wie eingangs bemerkt, lassen sie sich wegen der Zentrosymmetrie der Effekte in zwei Anteile  $A'_{(hkl)}$  und  $B'_{(hkl)}$  aufspalten, wobei

$$F_{(hkl)} e^{-2\pi i(hx + ky + lz)} = A'_{(hkl)} \cos 2\pi(hx + ky + lz) + B'_{(hkl)} \sin 2\pi(hx + ky + lz)$$

<sup>1)</sup> Mineralogisch-Petrographisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> Erster Teil der Arbeit siehe ZAMP 2, Fasc. 4, 217 (1951).

gilt. Einsetzen in (2) ergibt

$$\varrho_{xyz} = \frac{1}{E} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [A'_{(hkl)} \cos 2\pi (hx + ky + lz) + B'_{(hkl)} \sin 2\pi (hx + ky + lz)].$$

Indem man vorerst die Punkt- oder Flächenmannigfaltigkeit in *Formen* zusammenfaßt, erhält man für (1)

$$\mathfrak{B}_{(hkl)} = \sum_{f=1}^{\Phi} \sum_{q=1}^{n_f} \mu_q e^{2\pi i (h x_q + k y_q + l z_q)}. \quad (1')$$

Darin erstreckt sich die erste Summation über alle  $\Phi$  verschiedenen Gitterkomplexe (Formen  $f$ ), die zweite über alle  $n_f$  zu einem Gitterkomplex gehörenden Basispunkte. Auf einfach primitive Zelle bezogen ist die Anzahl  $n$  der Basispunkte eines Gitterkomplexes bei allgemeiner Punktlage gleich der Ordnung  $N$ ; bei speziellen Punktlagen wird sie  $N/\omega_1, N/\omega_2, \dots$  mit den  $\omega_i$  als Wertigkeiten der Punktlagen. Es mögen sich an der Basis  $\varphi_0$  Gitterkomplexe mit  $N$  Punkten und je  $\varphi_i$  Gitterkomplexe mit  $N/\omega_i$  Punkten beteiligen, wobei natürlich  $\varphi_0 + \varphi_1 + \dots = \Phi$  ist. Dann wird die Gesamtzahl der Basispunkte

$$Z = N \varphi_0 + \frac{N}{\omega_1} \varphi_1 + \frac{N}{\omega_2} \varphi_2 + \dots$$

Das Streuvermögen  $\mu$  ist, wenn nicht gerade ein Substitutionsmischkristall vorliegt, für alle Punkte eines Gitterkomplexes dasselbe, so daß jetzt höchstens  $\Phi$  verschiedene  $\mu$ -Werte auftreten.

Analog wird bei der Formenaufspaltung (2) zu

$$\varrho_{xyz} = \frac{1}{E} \sum_{f=1}^{\Phi} \sum_{q=1}^{n_f} \left[ A'_{(hkl)_q} \cos 2\pi (h_q x + k_q y + l_q z) + B'_{(hkl)_q} \sin 2\pi (h_q x + k_q y + l_q z) \right], \quad (2')$$

wobei nun die verschiedenen Formen  $\langle(hkl)\rangle$  mit  $f$  numeriert sind und die  $n_f$  die zugehörigen Flächenzahlen bedeuten. Damit wird über alle reflexionsfähigen Netzebenen  $(hkl)$  summiert.

Der Vorteil dieses Summationsverfahrens besteht darin, daß bei gegebener Symmetrie die Gesetzmäßigkeiten, die für die Formen (Gitterkomplexe oder Netzebenenscharenkomplexe) aus den Charakterentafeln ersichtlich sind, zu Vereinfachungen führen. Sind Formen allgemeiner Lage vorhanden ( $\varphi_0 > 0$ ), so gelten für die Gesamtheit nur die auf diese allgemeinen Formen bezüglichen Gesetze. Ist dagegen  $\varphi_0 = 0$ , so können *zusätzliche* Regeln auftreten, die oft eine Vieldeutigkeit in der Symmetriezuordnung zur Folge haben; diese Fälle sind aber von E. BRANDENBERGER und P. NIGGLI<sup>1)</sup> schon vollständig tabuliert.

<sup>1)</sup> E. BRANDENBERGER und P. NIGGLI, *Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*, Bd. I (Berlin, 1935).



Für einen allgemeinen Überblick genügt es, die für Formen *allgemeiner Lage* gültigen Gesetze anzugeben, und zwar für *eine* allgemeine Form, da die Symmetrieeigenschaften bei der Summation über mehrere Formen erhalten bleiben und sich zusätzliche Aussagen über spezielle Formen durch Einsetzen der Spezialwerte von selbst ergeben. Es sollen nur die Gesetzmäßigkeiten berücksichtigt werden, die sich auf den geometrischen Anteil beziehen; dieser geometrische Anteil findet sich bei der Summation über eine Form  $\langle xyz \rangle$  oder  $\langle hkl \rangle$  im Glied  $e^{2\pi i(hx + ky + lz)}$ .

a) Summation über die Punktlagen

Zunächst werde das Gleichungssystem (1) bzw. (1') betrachtet.  $\langle hkl \rangle$  wird konstant gehalten, und es ist der Beitrag zu untersuchen, den ein Gitterkomplex  $\langle xyz \rangle$  allgemeiner Lage in Abhängigkeit von der Raumgruppensymmetrie bzw. Charakterentafel an den geometrischen Anteil leistet. Das geschieht durch Aufspaltung des Strukturvektors in einen durch  $\cos 2\pi(hx + ky + lz)$  bestimmten *A-Anteil* und einen durch  $\sin 2\pi(hx + ky + lz)$  bestimmten *B-Anteil*, wobei in beiden Fällen alle zu  $xyz$  gleichwertigen Koordinatentripel einzusetzen sind. Die so für eine allgemeine Form entstehenden *A-* und *B-Anteile* bilden den *Strukturfaktor* des Gitterkomplexes.

Für  $xyz$  als Ausgangspunkt erhält man auf diese Weise  $\cos 2\pi(hx + ky + lz) = a_0 - a_1 - a_2 - a_3$  und  $\sin 2\pi(hx + ky + lz) = -b_0 + b_1 + b_2 + b_3$ . Die Bedeutung der Größen  $a_0, a_1, a_2, a_3$  und  $b_0, b_1, b_2, b_3$  geht aus der einer Charakterentafel analogen Darstellung Figur 14 hervor.

	$\cos 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz$	$= a_0$
[G]	$\cos 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz$	$= a_1$
	$\sin 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz$	$= b_1$
	$\sin 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz$	$= a_2$
	$\cos 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz$	$= b_2$
	$\sin 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz$	$= a_3$
	$\cos 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz$	$= b_3$
	$\sin 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz$	$= b_0$

Fig. 14  
Bedeutung der *a-* und *b-*Größen.

In symmorphen einfachen Raumgruppen gehören zu einem Gitterkomplex entweder nur Koordinatentripel mit verschiedenen Vorzeichen ( $G$ -Tafeln), oder zugleich solche mit Vertauschungen (andere Tafeln). Im ersten Falle ändern sich nur die Vorzeichen der  $a$ - oder  $b$ -Werte (wegen der Sinusglieder), im zweiten Falle auch die Art der Produkte aus Indizes und Koordinaten. So würde etwa für die Kopfzeile der Tafel  $K$  der Wert  $a_0[K]$  zu  $\cos 2\pi h y \cdot \cos 2\pi k \bar{x} \cdot \cos 2\pi l z$ .  $a_1[K]$ ,  $a_2[K]$ ,  $a_3[K]$ ,  $b_0[K]$ ,  $b_1[K]$ ,  $b_2[K]$  und  $b_3[K]$  erhält man daraus, wenn man auf  $a_0[K]$  den gleichen Algorithmus ausübt wie in Figur 14 auf  $a_0[G]$ .

Strukturfaktor									
Tabelle $\mathfrak{A}$					Tabelle $\mathfrak{B}$				
$a_0$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\sigma_1$	$\bar{b}_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\sigma_1$
$a_0$	$\bar{a}_1$	$a_2$	$a_3$	$\alpha_1$	$b_0$	$\bar{b}_1$	$b_2$	$b_3$	$\alpha_1$
$a_0$	$\bar{a}_1$	$a_2$	$a_3$	$\alpha_2$	$\bar{b}_0$	$\bar{b}_1$	$\bar{b}_2$	$\bar{b}_3$	$\alpha_2$
$a_0$	$a_1$	$\bar{a}_2$	$a_3$	$\beta_1$	$b_0$	$b_1$	$\bar{b}_2$	$b_3$	$\beta_1$
$a_0$	$a_1$	$\bar{a}_2$	$a_3$	$\beta_2$	$\bar{b}_0$	$\bar{b}_1$	$b_2$	$\bar{b}_3$	$\beta_2$
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\bar{a}_3$	$\gamma_1$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\bar{b}_3$	$\gamma_1$
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\bar{a}_3$	$\gamma_2$	$\bar{b}_0$	$\bar{b}_1$	$\bar{b}_2$	$b_3$	$\gamma_2$
$a_0$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\sigma_2$	$b_0$	$\bar{b}_1$	$\bar{b}_2$	$\bar{b}_3$	$\sigma_2$

Vorzeichen wie oben:

$$A\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (0 \bmod 2)/2 \quad B\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (0 \bmod 2)/2$$

$$B\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (1 \bmod 4)/4 \quad A\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (3 \bmod 4)/4$$

Alle Vorzeichen umgekehrt:

$$A\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (1 \bmod 2)/2 \quad B\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (1 \bmod 2)/2$$

$$B\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (3 \bmod 4)/4 \quad A\text{-Anteil für } P_{\zeta} = (1 \bmod 4)/4$$

Fig. 15

Berechnung des Strukturfaktors

Für die den Deckoperationen von  $D_{2h}$  entsprechenden Zeilen der Grundtafel  $G$  (ohne Zusatztranslationen) ergeben sich die zwei Tafeln  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  im oberen Teil der Figur 15, wobei es sich um Summenglieder handelt, so daß beispielsweise für  $\sigma_0$

$$a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \quad \text{und} \quad -b_0 + b_1 + b_2 + b_3$$

resultiert.

Indem man die Zeilen addiert, die nach Tabelle 2 den Symmetrieeoperationen einer symmorphen Raumgruppe entsprechen, erhält man für einen allgemeinen Gitterkomplex den  $A$ - und  $B$ -Anteil. Wegen der verschiedenen Vorzeichen heben sich dabei manche Glieder weg, und die Strukturfaktoren vereinfachen sich wesentlich. Sie lauten in der üblichen Aufstellung für die hypokubischen bis kubischen symmorphen Raumgruppen mit einfach primitivem Elementar-



parallelepiped entsprechend der Tabelle 4, die erstmals den Zusammenhang zwischen allen Strukturfaktoren dieser Raumgruppen offenbart. Diese Beispiele sprechen für die Zweckmäßigkeit des neuen Summationsverfahrens.

Tabelle 4

*Die Strukturfaktoren der einfachen symmorphen Raumgruppen der hypokubischen Syngonie (ohne rhomboedrische)*

		Koeffizient	A	B
Triklin	$C_1$	1	$(a_0 - a_1 - a_2 - a_3) [G]$	$(-b_0 + b_1 + b_2 + b_3) [G]$
	$C_i$	2		
Monoklin	$C_2$	2	$(a_0 - a_2) [G]$	$(-b_0 + b_2) [G]$ $(b_1 + b_3) [G]$ 0
	$C_s$	2		
	$C_{2h}$	4		
Ortho- rhombisch	$D_2$	4	$a_0 [G]$	$-b_0 [G]$ $b_3 [G]$ 0
	$C_{2v}$	4		
	$D_{2h}$	8		
Para- tetragonal	$C_4$	2	$(a_0 - a_3) [G + K]$	$(-b_0 + b_3) [G + K]$ $(-b_0 + b_3) [G - K]$ 0
	$S_4$	2		
	$C_{4h}$	4		
Holo- tetragonal	$D_4$	4	$a_0 [G + K]$	$-b_0 [G + K]$ $b_3 [G + K]$ $-b_0 [G - K]$ 0
	$C_{4v}$	4		
	$D_{2d}$	4		
	$D_{4h}$	8		
Para- kubisch	$T$	4	$a_0 [G + G' + G'']$	$-b_0 [G + G' + G'']$ 0
	$T_h$	8		
Holo- kubisch	$T_d$	4	$a_0 [G + G' + G'' + K + K' + K'']$	$-b_0 [G + G' + G'' - K - K' - K'']$ $-b_0 [G + G' + G'' + K + K' + K'']$ 0
	$O$	4		
	$O_h$	8		

Sind die Elementarparallelepipede mehrfach primitiv, so ist das Resultat mit einem weiteren Faktor zu multiplizieren, etwa

$$\text{für } C \text{ mit } 2 \cos^2 2\pi \frac{h+k}{4},$$

$$\text{für } I \text{ mit } 2 \cos^2 2\pi \frac{h+k+l}{4},$$

$$\text{für } F \text{ mit } 4 \cos^2 2\pi \frac{h+k}{4} \cos^2 2\pi \frac{k+l}{4} \cos^2 2\pi \frac{h+l}{4}.$$

Für die trigonalen und hexagonalen symmorphen Raumgruppen, bezogen auf orthohexagonales Elementarparallelepiped und zugehörige Koordinaten-

werte, lauten die Strukturfaktoren entsprechend Tabelle 5, wobei jedoch in allen diesen Fällen noch mit  $2 \cos^2 2\pi [(h+k)/4]$  zu multiplizieren ist, da bei einfach hexagonaler Translationsgruppe das *orthohexagonale* Elementarparallelepiped basisflächenzentriert ist. Bei rhomboedrischer Translationsgruppe kommt ein weiterer Faktor dazu.

Tabelle 5

Die Strukturfaktoren der trigonalen und hexagonalen (einfachen) symmorphen Raumgruppen

		Koeffizient	A	B
Para-trigonal	$C_3$ $C_{3i}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} (a_0 - a_1 - a_2 - a_3) [G + H' + H''] \\ (a_0 - a_1) [G + H' + H''] \end{matrix} \right\}$	$\begin{matrix} (-b_0 + b_1 + b_2 + b_3) [G + H' + H''] \\ 0 \end{matrix}$
Holo-trigonal	$D_3$ $C_{3v}$ $D_{3d}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} (a_0 - a_1) [G + H' + H''] \\ (a_0 - a_3) [G + H' + H''] \end{matrix} \right\}$	$\begin{matrix} (-b_0 + b_1) [G + H' + H''] \\ (b_2 + b_3) [G + H' + H''] \\ 0 \end{matrix}$
Para-hexagonal	$C_{3h}$ $C_6$ $C_{6h}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} (a_0 - a_3) [G + H' + H''] \\ a_0 [G + H' + H''] \end{matrix} \right\}$	$\begin{matrix} (b_1 + b_2) [G + H' + H''] \\ (-b_0 + b_3) [G + H' + H''] \\ 0 \end{matrix}$
Holo-hexagonal	$D_{3h}$ $D_6$ $C_{6v}$ $D_{6h}$	$\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} a_0 [G + H' + H''] \\ a_0 [G + H' + H''] \end{matrix} \right\}$	$\begin{matrix} b_1 [G + H' + H''] \\ -b_0 [G + H' + H''] \\ b_3 [G + H' + H''] \\ 0 \end{matrix}$

Die symmetriebedingten Gesetzmäßigkeiten, welche die Zeilenauswahl in der Charakterentafel mit der Auswahl der Glieder im Strukturfaktor verknüpfen, treten beim Vergleich der Tabellen 4 und 5 mit Tabelle 2 klar zutage.

Liegt nun der Nullpunkt auf irgendeinem Symmetrieelement oder ist er um Viertel- oder Achtelwerte dagegen verschoben, oder hat man überhaupt die reduzierte Charakterentafel einer *nichtsymmorphen* Raumgruppe vor sich, so treten zu den  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Werten Zusatzgrößen hinzu, die den Charakteren entsprechen. Dann muß beispielsweise in der Zeile  $\alpha_1$  zur Bildung von  $a_1$  das Produkt

$$\cos 2\pi h \bar{x} \cdot \sin 2\pi k y \cdot \sin 2\pi l z$$

durch<sup>1)</sup>

$$\cos 2\pi h \cdot (\bar{x} + T_{11} + V_1) \cdot \sin 2\pi k (y + T_{12}) \cdot \sin 2\pi l (z + T_{13})$$

ersetzt werden, zur Bildung von  $a_2$

$$\sin 2\pi h \bar{x} \cdot \cos 2\pi k y \cdot \sin 2\pi l z$$

<sup>1)</sup> Ist  $T_{11} + V_1 = n/2$ , so kann man + - oder - - Zeichen verwenden; für Viertelwerte siehe als Beispiel die Figur 17.



durch

$$\sin 2\pi h (\bar{x} + T_{11} + V_1) \cdot \cos 2\pi k (y + T_{12}) \cdot \sin 2\pi l (z + T_{13})$$

usw. So entsteht für jede Zeile der Charakterentafel eine neue Summe der  $a$ - bzw.  $b$ -Werte, die aber, solange die  $(T_{ij} + V_j)$  nur die Werte 0,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{3}{4}$  annehmen (wie das für Nullpunkte auf Symmetrieelementen immer der Fall ist), in einfacher Beziehung zur entsprechenden Summe ohne Zusatztranslationen steht. Maßgebend ist für jede Zeile der Charakterentafel nur die *Summe aller mit den zugehörigen Flächenindizes multiplizierten Zusatzgrößen*, also zum Beispiel für  $\alpha_1$  der Ausdruck  $h(T_{11} + V_1) + k T_{12} + l T_{13}$ . Nennt man diese Summe  $P_{\alpha_1}$  und entsprechend  $h T_{11} + k (T_{12} + V_2) + l (T_{13} + V_3) = P_{\alpha_2}$  allgemein die entsprechende Summe für eine beliebige Zeile  $P_{\zeta}$ , so gelten für den  $A$ -Anteil und  $B$ -Anteil je nach der Teilbarkeit der  $P_{\zeta}$  die Gesetzmäßigkeiten in der unteren Hälfte der Figur 15.

Im folgenden sollen die Kongruenzen nicht mehr durch ihre Moduli bezeichnet werden. In abgekürzter Schreibweise wird jetzt 0 für 0, 1, 2, ...;  $\frac{1}{2}$  für  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ;  $\frac{1}{4}$  für  $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots$  und  $\frac{3}{4}$  für  $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \dots$  gesetzt. Dann gilt:

1.  $A = 0$ , wenn alle  $P_{\zeta}$  der Doppelzeilen zueinander in der Beziehung  $P_{\zeta_1} \rightarrow P_{\zeta_2}$  wie  $0 \rightarrow \frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{2} \rightarrow 0$  oder  $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$  oder  $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4}$  stehen.

2.  $B = 0$ , für  $P_{\zeta_1} \rightarrow P_{\zeta_2}$  wie  $0 \rightarrow 0$  oder  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{3}{4}$  oder  $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$ .

3.  $A = 8a_0$ , für alle  $P_{\zeta_1} \rightarrow P_{\zeta_2}$  wie  $0 \rightarrow 0$ , und  $A = -8a_0$ , für alle  $P_{\zeta_1} \rightarrow P_{\zeta_2}$  wie  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ;  $B = 8b_0$ , für  $P_{\zeta_1} \rightarrow P_{\zeta_2}$  wie  $0 \rightarrow \frac{1}{2}$  usw.

4. Wird ein *vorhandenes* Symmetriezentrum zum Nullpunkt gewählt (reduzierte Charakterentafel), so erhalten wegen  $P_{\zeta_1} = P_{\zeta_2}$  die Beiträge beider Zeilen einer Doppelzeile an den  $A$ -Anteil gleiches, diejenigen an den  $B$ -Anteil entgegengesetztes Vorzeichen, und damit wird  $B = 0$ . Daraus ergeben sich die an anderer Stelle<sup>1)</sup> mitgeteilten einfachen Regeln zur Bildung der Strukturfaktoren, zum Beispiel für  $D_{2h}$  folgenderweise: Bei einfachen Raumgruppen in reduzierter Darstellung ist

$$A = 8 a_0 = 8 \cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y \cdot \cos 2\pi l z,$$

und es muß an Stelle der Kosinuswerte der Sinuswert eingesetzt werden

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \cos 2\pi h x, \text{ wenn } P_{\alpha} \\ \text{für } \cos 2\pi k y, \text{ wenn } P_{\beta} \\ \text{für } \cos 2\pi l z, \text{ wenn } P_{\gamma} \end{array} \right\} \text{ eine ungerade Anzahl von Halben ergibt.}$$

Zugleich ändert sich beim Auftreten von Sinuswerten das Vorzeichen. Da aus Symmetriegründen stets nur zwei dieser drei  $P_{\zeta}$  die Bedingung dafür erfüllen können, wird  $8 a_0$  je nach den besonderen Verhältnissen in  $-8 a_1$ ,  $-8 a_2$  oder  $-8 a_3$  umgewandelt.

<sup>1)</sup> P. NIGGLI, Acta crystallographica 2, 263 (1949); ZAMP 1, 71 (1950).

5. Bei mehrfach primitiven Elementarparallelepipeden kommen weitere Faktoren hinzu, wie sie S. 315 erwähnt worden sind. Es handelt sich dabei um  $\cos^2$  des Produktes aus  $2\pi/4$  und einer bestimmten Summe von Indizes. Da die Indizes ganzzahlig sind, werden die Faktoren 0, wenn die Summe ungerade ist, und 1, wenn sie gerade ist. Im ersteren Falle verschwinden die ganzen Struktur-faktoren; das ergibt die auf der Translationsgruppe beruhenden *integralen Auslöschungsgesetze*.

6. Die Zeilen  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  und  $\gamma_1$  in  $G$  entsprechen Symmetrieebenen. Wird der Flächenindex auf der Hauptdiagonale gleich Null gesetzt, also  $(0kl)$  für  $\alpha_1$ ,  $(h0l)$  für  $\beta_1$  und  $(hk0)$  für  $\gamma_1$ , dann erhält man die Flächen in der Zone senkrecht zu den Symmetrieebenen. Für die Bildung der  $P_c$  in diesen Zonen kommen nur die  $s$ -Charaktere in Frage. Bezeichnet man die aus ihnen entstehenden Produktsummen mit  $P_s$ , so ergeben sich aus dem Verschwinden der Strukturfaktoren für bestimmte Werte von  $P_s$  die *zonalen Auslöschungsgesetze*, die sich also stets auf die sogenannten Leitzonen senkrecht zu Symmetrieebenen beziehen. Da die  $P_s$  als Zusatzgrößen nur  $T_{ij}$  enthalten, sind die zonalen Auslöschungsgesetze von der Wahl des Nullpunktes unabhängig; das ermöglicht ihre schon 1919 eingeführte Verwendung als allgemeingültige *Raumgruppenkriterien*<sup>1)</sup> bei allgemeiner Punktlage und beliebiger Nullpunktswahl. Die Auslöschungsgesetze für Zonen senkrecht zu den Symmetrieebenen anderer Tafeln als von  $G$  ergeben sich unter Berücksichtigung der Zuordnung von Tabelle 3 in ähnlicher Weise.

7. Bezeichnet man analog die nur durch die  $d$ -Charaktere bestimmten Produktsummen als  $P_d$ -Werte, so liefert das durch sie hervorgerufene Verschwinden der Strukturfaktoren die *serialen Auslöschungsgesetze* für Ebenen senkrecht zu Schraubenachsen. Auch sie sind unabhängig von der Nullpunktswahl.

Aus diesen Ausführungen ist ersichtlich, daß sich für beliebige Raumgruppen die Strukturfaktoren und die integralen, zonalen und serialen Auslöschungsgesetze für Gitterkomplexe allgemeiner Lage, sowie beim Einsetzen der besonderen Koordinatenwerte auch für spezielle Gitterkomplexe, unmittelbar aus den Charakterentafeln ergeben. Das beruht nur darauf, daß die Symmetrie der Raumgruppe durch die Tafeln *vollständig* beschrieben wird; die Zusatzgrößen bestimmen ja sowohl die  $P_c$ -Werte als auch unmittelbar die Charaktere.

Ist beispielsweise in der  $G$ -Tafel ein Charakter in der zweiten Spalte  $\bar{I}$ , so bedeutet das, daß der zur betreffenden Zeile gehörige  $P_c$ -Wert das Glied  $k/2$  enthält usw. Man kann daher zu einer gegebenen Charakterentafel sofort die entsprechenden Teilglieder der  $P_c$  herausschreiben, etwa die zu  $P_d$  gehörigen links und die zu  $P_s$  gehörigen rechts.  $P_c$  ergibt sich dann aus der Summe der  $P_d$ - und  $P_s$ -Glieder. Zwei Beispiele mögen das erläutern.

$D_{2h}^4$ , bezogen auf einen Nullpunkt in  $D_2$ , wird durch die Darstellung Figur 16 beschrieben.

<sup>1)</sup> P. NIGGLI, *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums* (Leipzig 1919).



Der Strukturfaktor ergibt sich, wenn  $(h + k)$  gerade ist, wie für  $D_{2h}^1$  zu  $A = 8 \cos 2 \pi h x \cdot \cos 2 \pi k y \cdot \cos 2 \pi l z$ ,  $B = 0$ . Für  $(h + k)$  ungerade wird dagegen  $A = 0$ , und  $B$  errechnet sich nach der Tabelle Figur 15 zu

$\sigma_1$

$\sigma_2$

$\alpha_1$

$\alpha_2$

$\beta_1$

$\beta_2$

$\gamma_1$

$\gamma_2$

}

$-b_0 + b_1 + b_2 + b_3$

$-b_0 + b_1 + b_2 + b_3$

$-b_0 + b_1 - b_2 - b_3$

$-b_0 + b_1 - b_2 - b_3$

$-b_0 - b_1 + b_2 - b_3$

$-b_0 - b_1 + b_2 - b_3$

$-b_0 - b_1 - b_2 + b_3$

$-b_0 - b_1 - b_2 + b_3$

$- 8 b_0 = - 8 \sin 2 \pi h x \cdot \sin 2 \pi k y \cdot \sin 2 \pi l z.$

In der nichtreduzierten  $G$ -Tafel werden die zonalen Auslöschungsgesetze durch die  $P_s$ -Werte der Zeilen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , also  $P_{s_1}$ , und die serialen durch die  $P_a$ -Werte der Zeilen  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , also  $P_{a_2}$ , bestimmt. Für  $D_{2h}^4$  sind in der Zone  $(0kl)$  nur Ordnungen mit  $k$  gerade, in der Zone  $(h0l)$  solche mit  $h$  gerade und in der Zone  $(hk0)$  solche mit  $(h + k)$  gerade vorhanden. Besondere seriale Auslöschungen treten nicht auf.

$D_{2h}^4$ (Nullpunkt in $D_2$ )							
$d:$				$s:$	$P_c$	$P_{s_1}$	$P_{a_2}$
	1	1	1	$\sigma_1$	0		
$\frac{h}{2}$				$\alpha_1$	$\frac{h+k}{2}$	$\frac{k}{2}$	
0	<div><div>1</div><div>1</div></div>	<div><div>1</div><div>1</div></div>	<div><div>1</div><div>1</div></div>	$\alpha_2$	0		0
$\frac{k}{2}$				$\beta_1$	$\frac{h+k}{2}$	$\frac{h}{2}$	
0	<div><div>1</div><div>1</div></div>	<div><div>1</div><div>1</div></div>	<div><div>1</div><div>1</div></div>	$\beta_2$	0		0
0				$\gamma_1$	$\frac{h+k}{2} + \frac{k}{2}$	$\frac{h+k}{2}$	
0	<div><div>1</div><div>1</div></div>	<div><div>1</div><div>1</div></div>	<div><div>1</div><div>1</div></div>	$\gamma_2$	0		0
	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\sigma_2$	$\frac{h+k}{2}$		

Fig. 16  
Charakterentafel und  $P$ -Werte für  $D_{2h}^4$ .

Als zweites Beispiel soll die flächenzentrierte Raumgruppe  $D_{2h}^{24}$ , bezogen auf zwei verschiedene Nullpunkte, betrachtet werden. Wegen der Translationsgruppe  $F$  sind die Strukturfaktoren nur dann von Null verschieden, wenn kein Glied des Faktors

$$4 \cos^2 2 \pi \frac{h+k}{4} \cos^2 2 \pi \frac{k+l}{4} \cos^2 2 \pi \frac{h+l}{4}$$

verschwindet, also nur dann, wenn entweder alle Indizes gerade oder alle ungerade sind. Figur 17 zeigt die Charakteren- und Koordinatentafeln, und zwar unter I bezogen auf einen Nullpunkt im Symmetriezentrum, und unter II bezogen auf einen Nullpunkt in  $D_2$ . Man erkennt, daß die zweite Darstellung aus

$D_{2h}^{24}$

**I**  
Nullpunkt in  $C_2$   
Charakterentafel :

$F$	1	1	1	$\sigma_1$
1	0	0	$\alpha_1$	$\alpha_2$
0	1	0	$\beta_1$	$\beta_2$
0	0	1	$\gamma_1$	$\gamma_2$
			$\sigma_2$	

Koordinatentafel :

$F$	$x$	$y$	$z$	$s$
0	$\bar{x}$	$y + 1/4$	$z + 1/4$	$\frac{h+1}{4}$
0	$x$	$\bar{y} + 3/4$	$\bar{z} + 3/4$	$\frac{3(h+1)}{4}$
0	$x + 1/4$	$\bar{y}$	$z + 1/4$	$\frac{h+1}{4}$
0	$\bar{x} + 3/4$	$y$	$\bar{z} + 3/4$	$\frac{3(h+1)}{4}$
0	$x + 1/4$	$y + 1/4$	$\bar{z}$	$\frac{h+h}{4}$
0	$\bar{x} + 3/4$	$\bar{y} + 3/4$	$z$	$\frac{3(h+h)}{4}$
	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	

**II**  
Nullpunkt in  $D_2$   
Charakterentafel :

$F$	1	1	1	$\sigma_1$
0	0	0	1	$\alpha_1$
0	1	0	1	$\alpha_2$
0	0	1	0	$\beta_1$
1	1	1	1	$\beta_2$
0	0	0	0	$\gamma_1$
1	1	1	1	$\gamma_2$
	0	0	0	$\sigma_2$

Koordinatentafel :

$F$	$x$	$y$	$z$	$s$
$\frac{h}{4}$	$\bar{x} + 1/4$	$y + 1/4$	$z + 1/4$	$\frac{h+1}{4}$
0	$x$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	0
$\frac{h}{4}$	$x + 1/4$	$\bar{y} + 1/4$	$z + 1/4$	$\frac{h+1}{4}$
0	$\bar{x}$	$y$	$\bar{z}$	0
$\frac{1}{4}$	$x + 1/4$	$y + 1/4$	$\bar{z} + 1/4$	$\frac{h+h}{4}$
0	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$z$	0
	$\bar{x} + 1/4$	$\bar{y} + 1/4$	$\bar{z} + 1/4$	

Fig. 17

Charakteren- und Koordinatentafeln für  $D_{2h}^{24}$ , bezogen auf zwei verschiedene Nullpunkte.

der ersten hervorgeht, wenn man entsprechend der Nullpunktverschiebung um  $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$  zu allen negativen Koordinatenwerten  $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  hinzufügt.

In den Koordinatentafeln ist an Stelle von  $\frac{1}{4}$  der Zusatzgrößen der Wert  $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + 1$  geschrieben. Aus den Charakterentafeln lassen sich nun die  $P_c$ -Werte in Abhängigkeit vom Bau der Indizestripel angeben; sie sind für beide Aufstellungen in Tabelle 6 zusammengestellt, wobei wieder 1 für 1 (mod 4) usw. steht.

Setzt man die  $P_c$ -Werte in die Tabellen der Figur 15 ein und addiert die einzelnen Glieder, so erhält man für die verschiedenen Typen von  $(hkl)$  folgende Strukturfaktoren:



Aufstellung I

Typus <i>a</i> und <i>b</i> :	$A = 4 (-4 a_0 - 4 a_1 - 4 a_2 - 4 a_3),$	$B = 0;$
Typus <i>c</i> und <i>d</i> :	$A = 4 (4 a_0 - 4 a_1 - 4 a_2 + 4 a_3),$	$B = 0;$
Typus <i>e</i> und <i>f</i> :	$A = 4 (4 a_0 - 4 a_1 + 4 a_2 - 4 a_3),$	$B = 0;$
Typus <i>g</i> und <i>h</i> :	$A = 4 (4 a_0 + 4 a_1 - 4 a_2 - 4 a_3),$	$B = 0;$
Typus <i>i</i> und <i>k</i> :	$A = 4 \cdot 8 a_0,$	$B = 0;$
Typus <i>l</i> und <i>m</i> :	$A = 4 (-8 a_3),$	$B = 0;$
Typus <i>n</i> und <i>o</i> :	$A = 4 (-8 a_2),$	$B = 0;$
Typus <i>p</i> und <i>q</i> :	$A = 4 (-8 a_1),$	$B = 0.$

Tabelle 6

Indizesbau		allgem.	$\langle 111 \rangle$	$\langle 333 \rangle$	$\langle 113 \rangle$	$\langle 331 \rangle$	$\langle 131 \rangle$	$\langle 313 \rangle$	$\langle 311 \rangle$	$\langle 133 \rangle$	$\langle 222 \rangle$	$\langle 444 \rangle$	$\langle 224 \rangle$	$\langle 442 \rangle$	$\langle 242 \rangle$	$\langle 424 \rangle$	$\langle 422 \rangle$	$\langle 244 \rangle$
Aufstellung I	$\sigma_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\alpha_1$	$\frac{k+l}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	$\alpha_2$	$\frac{3(k+l)}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	$\beta_1$	$\frac{h+l}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\beta_2$	$\frac{3(h+l)}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\gamma_1$	$\frac{h+k}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\gamma_2$	$\frac{3(h+k)}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Aufstellung II	$\sigma_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_2$	$\frac{h+k+l}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\alpha_1$	$\frac{h+k+l}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\alpha_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\beta_1$	$\frac{h+k+l}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\beta_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\gamma_1$	$\frac{h+k+l}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\gamma_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Typus:			<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>

## Aufstellung II

Typus $a, d, f, h$ :	$A = 4 (4 a_0 + 4 b_0)$ ,	$B = 4 (-4 a_0 - 4 b_0)$ ;
Typus $b, c, e, g$ :	$A = 4 (4 a_0 - 4 b_0)$ ,	$B = 4 (4 a_0 - 4 b_0)$ ;
Typus $k, l, n, p$ :	$A = 4 \cdot 8 a_0$ ,	$B = 0$ ;
Typus $i, m, o, q$ :	$A = 0$ ,	$B = 4 (-8 b_0)$ .

Die zonalen Auslöschungsgesetze ergeben sich aus den  $P_s$ -Werten der Zeilen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , wie sie rechts neben die Koordinatentafeln der Figur 17 geschrieben sind. Die Nullpunktswahl hat keinen Einfluß,

$D_{4h}^9$				G	K
K:	$y$	$\bar{x}$	$z + \frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
G:	$x$	$y$	$z$		
	1	1	1	0	$\frac{1}{2}$
	1	1	1	0	$\frac{1}{2}$
	1	1	1	0	$\frac{1}{2}$
				0	$\frac{1}{2}$

Fig. 18

Charakterentafel für  $D_{4h}^9$ .

ben sind. Die Nullpunktswahl hat keinen Einfluß, und man erhält für die Zone  $(0kl)$  Auslöschung für alle Flächen, bei denen nicht  $k$  und  $l$  gerade und  $(k+l)$  durch 4 teilbar ist, und Analoges für die übrigen Leitzonen. Besondere seriale Auslöschungsgesetze gibt es nicht, da die in Frage kommenden Zeilen  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  keine speziellen  $d$ -Charaktere aufweisen. Immerhin geht sowohl aus dem integralen Auslöschungsgesetz der Translationsgruppe  $F$  als auch aus den zonalen Auslöschungsgesetzen hervor, daß für beide Aufstellungen in  $(h00)$ ,  $(0k0)$  und  $(00l)$   $h$  bzw.  $k$  bzw.  $l$  gerade sein müssen.

Enthält die *Kopfzeile* einer zweiten Tafel Zusatztranslationen, so ist das für den entsprechenden Anteil des Strukturfaktors natürlich zu berücksichtigen. So gilt etwa für  $D_{4h}^9$  die reduzierte Charakterentafel Figur 18 vom Typ G und K. Weil der Nullpunkt im Symmetriezentrum gewählt wurde, ist  $B = 0$ .

Für die G-Tafel treten keinerlei Zusatzgrößen auf; ihr Beitrag an den Strukturfaktor ist daher unabhängig von  $(hkl)$  gleich

$$8 a_0 = 8 \cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y \cdot \cos 2\pi l z.$$

Die K-Tafel enthält dagegen durchwegs  $l/2$ , und sie trägt daher  $8 a_0 [K]$  für  $l$  gerade bzw.  $-8 a_0 [K]$  für  $l$  ungerade zum Strukturfaktor bei.  $a_0 [K]$  hat den Wert

$$8 \cos 2\pi h y \cdot \cos 2\pi k \bar{x} \cdot \cos 2\pi l z.$$

Damit lautet der gesamte Strukturfaktor:

für  $l$  gerade

$$A = 8 \cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y \cdot \cos 2\pi l z + 8 \cos 2\pi h y \cdot \cos 2\pi k \bar{x} \cdot \cos 2\pi l z,$$



für  $l$  ungerade

$$A = 8 \cos 2 \pi h x \cdot \cos 2 \pi k y \cdot \cos 2 \pi l z - 8 \cos 2 \pi h y \cdot \cos 2 \pi k \bar{x} \cdot \cos 2 \pi l z.$$

In den Zonen  $(h k 0)$ ,  $(h 0 l)$  und  $(0 k l)$  treten keine Auslöschungsgesetze auf, aber in der Zone  $(h h l)$  sind nur Interferenzen mit  $l$  gerade vorhanden.

b) *Summation über die Flächen*

Das Summationsverfahren der *Fourier-Analyse* zur Bestimmung der Elektronendichte nach Formel (2'), S. 312, bietet in seinem geometrischen Teil gegenüber der erläuterten Summation über die konstituierenden Teilchenlagen nichts Neues. Das wird sofort deutlich, wenn man zunächst wieder einfache symmorphe Raumgruppen (ohne Zusatztranslationen) betrachtet. Bildet man für ein festgehaltenes Koordinatentripel  $xyz$  die Summe über die gleichwertigen Flächen einer Form  $\langle h k l \rangle$ , so treten bei gleicher Symmetrie in den Ausdrücken  $\left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2 \pi (h x + k y + l z)$  lediglich an Stelle der Vorzeichenwechsel und allfälligen Vertauschungen der Koordinaten  $x, y, z$  die Vorzeichenwechsel und Vertauschungen der Indizes  $(h k l)$ . Da aber stets nur die Produkte aus Index und Koordinate eine Rolle spielen, verhält sich  $(\bar{h} k l)$  gegenüber  $(h k l)$  genau wie  $\bar{x} y z$  gegenüber  $x y z$  usw. Somit gelten für die Form  $\langle h k l \rangle$  in  $D_{2h}$  ohne weiteres die Tabellen der Figur 15.

Der Formenbeitrag in der Fourier-Analyse läßt sich auf die gleiche Weise berechnen wie der Beitrag der Gitterkomplexe an den Strukturfaktor. Es ist nur bei den Faktoren darauf Rücksicht zu nehmen, daß infolge des Friedelschen Gesetzes zu jeder Fläche die Gegenfläche hinzugefügt wird. Dadurch werden alle Formen *zentrosymmetrisch*, und beim Fehlen eines Symmetriezentrums ist die Zähligkeit der Netzebenenformen — mit Ausnahme gewisser spezieller Lagen — doppelt so groß wie die der entsprechenden kristallographischen Flächenformen. Da in nicht zentrosymmetrischen Raingruppen  $B'_{(h k l)} = - B'_{(h k l)}$  ist, sind in diesem Falle nicht nur die  $a$ , sondern auch die  $b$  der in Betracht fallenden Zeilen *doppelt* zu zählen. So gilt etwa für  $C_{2v}$ :

$$A'_{(h k l)} = A'_{(\overline{h} k l)} = A'_{(\bar{h} k l)} = A'_{(h \bar{k} l)} = A'_{(h k \bar{l})} = A'_{(\bar{h} k \bar{l})} = A'_{(h \bar{k} \bar{l})} = A'_{(\bar{h} k l)},$$

aber

$$B'_{(h k l)} = B'_{(\bar{h} k l)} = B'_{(h \bar{k} l)} = B'_{(\bar{h} k l)} = - B'_{(\bar{h} k l)} = - B'_{(h k \bar{l})} = - B'_{(\bar{h} k \bar{l})} = - B'_{(h \bar{k} \bar{l})}.$$

	a)	b)	c)	d)
Zu einer Form in $C_{2v}^1$ gehören	$h k l$	$\bar{h} k l$	$h \bar{k} l$	$\bar{h} k l$
und als an sich nicht gleichwertige Gegenflächen	$h \bar{k} l$	$h k \bar{l}$	$\bar{h} k \bar{l}$	$h \bar{k} \bar{l}$

und man erhält:

a)	$a_0 - a_1 - a_2 - a_3$		$-b_0 + b_1 + b_2 + b_3$
	$a_0 - a_1 - a_2 - a_3$		$-b_0 + b_1 + b_2 + b_3$
b)	$a_0 - a_1 + a_2 + a_3$		$b_0 - b_1 + b_2 + b_3$
	$a_0 - a_1 + a_2 + a_3$		$b_0 - b_1 + b_2 + b_3$
c)	$a_0 + a_1 - a_2 + a_3$		$b_0 + b_1 - b_2 + b_3$
	$a_0 + a_1 - a_2 + a_3$		$b_0 + b_1 - b_2 + b_3$
d)	$a_0 + a_1 + a_2 - a_3$		$-b_0 - b_1 - b_2 + b_3$
	$a_0 + a_1 + a_2 - a_3$		$-b_0 - b_1 - b_2 + b_3$
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span>Summe</span> <span><math>2 \cdot 4 a_0 = 8 a_0</math></span> <span>+</span> <span><math>2 \cdot 4 b_3 = 8 b_3</math></span> </div>			

Flächen, die auf gewöhnlichen Symmetrieelementen (ohne Schraubung oder Gleitung) senkrecht stehen, besitzen als Form entsprechend ihrer Wertigkeit eine geringere Flächenzahl  $N/\omega$  als die Form allgemeiner Lage. Dies ist natürlich bei der Fourier-Analyse ebenso zu berücksichtigen, wie es bei der Summation über die Gitterkomplexe geschah.

Treten Zusatzgrößen (Gleitkomponenten, Schraubungskomponenten, Abstände der Symmetrieelemente vom Nullpunkt) hinzu, so entstehen für die  $F_{(hkl)}$  gleichwertiger Flächen *Phasenverschiebungen*. Wenn beispielsweise  $(hkl)$  an sich mit  $(hkl)$  gleichwertig ist, die Zeile  $\alpha_1$  aber eine Zusatzgröße  $P_{\alpha_1}$  enthält, dann wird  $F_{(hkl)} = e^{2\pi i P_{\alpha_1}} F_{(hkl)}$  usw. Zur Bildung der  $a$ - und  $b$ -Werte einer

Form, der  $(hkl)$  und  $(\bar{h}kl)$  angehören, sind also nicht ohne weiteres die Werte der Tabellen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  von Figur 15 oben zu benutzen, sondern es muß wie bei der Berechnung des Strukturfaktors dem Einfluß von  $P_c$  in der Figur 15 unten angeführten Weise Rechnung getragen werden.

So läßt sich für alle Raumgruppen der Beitrag einer Flächenform an die Elektronendichte angeben, und die Summation wird ähnlich vereinfacht, wie das bei der Bildung des Strukturfaktors

$d:$	$D_{2h}^{16}$	$s:$		$P_c$
$\frac{h}{2}$	$\bar{1}$	$\frac{k+l}{2}$	$\sigma_1$	$0$
$\frac{h}{2}$	$\bar{1}$	$\frac{h}{2}$	$\alpha_1$	$\frac{h+k+l}{2}$
$\frac{l}{2}$	$1$	$\frac{h}{2}$	$\alpha_2$	$\frac{h+k+l}{2}$
$\frac{h}{2}$	$\bar{1}$	$\frac{h}{2}$	$\beta_1$	$\frac{h+k}{2}$
$\frac{h}{2}$	$\bar{1}$	$\frac{h}{2}$	$\beta_2$	$\frac{h+k}{2}$
$\frac{l}{2}$	$1$	$\frac{l}{2}$	$\gamma_1$	$\frac{1}{2}$
$\frac{l}{2}$	$1$	$\frac{l}{2}$	$\gamma_2$	$\frac{1}{2}$
$\frac{l}{2}$	$\bar{1}$	$\frac{l}{2}$	$\sigma_2$	$0$

Fig. 19  
Charakterentafel für  $D_{2h}^{16}$ .

der Fall war. Die Gesamtberechnung aus einer Charakterentafel soll noch an dem Beispiel von  $D_{2h}^{16}$  in reduzierter Darstellung (Figur 19) erläutert werden. Für  $(hkl)$  und  $(hkl)$  sind die Phasenverschiebungen stets  $= 0$ ; für  $(\bar{h}kl)$  und  $(h\bar{k}l)$  bzw.  $(hkl)$  und  $(hkl)$  bzw.  $(hkl)$  und  $(hkl)$  werden sie  $= 0$  oder  $\frac{1}{2}$ , je



nachdem ob  $(h + k + l)$  bzw.  $(h + k)$  bzw.  $l$  gerade oder ungerade ist. Die Indizes lassen sich nach ihrem Verhalten in die folgenden Fälle einteilen:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1. $(h + k + l)$ gerade, $l$ gerade: | a) $h$ und $k$ gerade,<br>b) $h$ und $k$ ungerade;           |
| 2. $(h + k)$ gerade, $l$ ungerade:   | a) $h$ und $k$ gerade,<br>b) $h$ und $k$ ungerade;           |
| 3. $(h + k)$ ungerade, $l$ gerade:   | a) $h$ gerade, $k$ ungerade,<br>b) $h$ ungerade, $k$ gerade; |
| 4. $(h + k)$ ungerade, $l$ ungerade: | a) $h$ gerade, $k$ ungerade,<br>b) $h$ ungerade, $k$ gerade. |

Da ein Symmetriezentrum vorhanden ist, sind die  $B'_{(hkl)} = 0$ , und  $F_{(hkl)} = A'_{(hkl)}$ . Somit ergibt sich für die Summation

$$\varrho_{xyz} = \frac{1}{E} [\Sigma \text{Fälle 1} + \Sigma \text{Fälle 2} + \Sigma \text{Fälle 3} + \Sigma \text{Fälle 4}] ,$$

wobei für die einzelnen Fälle die folgenden Ausdrücke einzusetzen sind:

Fall 1a:

$$\begin{aligned} & 8 \Sigma F_{(hkl)} \cos 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz + 4 \Sigma F_{(0kl)} \cos 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz \\ & + 4 \Sigma F_{(h0l)} \cos 2\pi hx \cdot \cos 2\pi lz + 4 \Sigma F_{(hk0)} \cos 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \\ & + 2 \Sigma F_{(h00)} \cos 2\pi hx + 2 \Sigma F_{(0k0)} \cos 2\pi ky + 2 \Sigma F_{(00l)} \cos 2\pi lz + 1 F_{(000)} . \end{aligned}$$

Für den Fall 1b verschwinden alle Glieder mit Ausnahme des ersten und vierten.

Fall 2a und 2b:

$$- 8 \Sigma F_{(hkl)} \sin 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz - 4 \Sigma F_{(h0l)} \sin 2\pi hx \cdot \sin 2\pi lz ,$$

Fall 3a und 3b:

$$- 8 \Sigma F_{(hkl)} \sin 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \cdot \cos 2\pi lz - 4 \Sigma F_{(hk0)} \sin 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky .$$

Fall 4a und 4b:

$$- 8 \Sigma F_{(hkl)} \cos 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz - 4 \Sigma F_{(0kl)} \sin 2\pi ky \cdot \sin 2\pi lz .$$

Die einzelnen Summationen erstrecken sich wieder über die betreffenden Formen. Bei den Spezialformen ist zu berücksichtigen, daß in Zonen mit  $h$ ,  $k$  oder  $l = 0$  keine Werte auftreten, wenn  $h$  bzw.  $k$  bzw.  $l$  ungerade ist, und daß in den Leitzonen der Wert 0 resultiert, wenn  $P_s$  ein ungerades Vielfaches von  $\frac{1}{2}$  wird. Ähnlich sind  $(h00)$ ,  $(0k0)$  und  $(00l)$  nicht von  $(hkl)$ -Werten ableitbar, in

denen einzelne zu Null werdende Indizes als ungerade vorausgesetzt wurden.  $F_{(000)}$  tritt nur einmal im Fall 1a auf, wo alle Indizes gerade sein müssen.

Oft betrachtet man nur Projektionen der Dichteverteilung. Den *zweidimensionalen Fall* der Projektion auf eine Ebene  $(001)_0$  erhält man etwa, indem in den Formeln  $z = 0$  gesetzt wird. Das ergibt beispielsweise für  $D_{2h}^{16}$  bzw.  $C_{2v}^9$ , wenn nur die Flächen  $(hk0)$  berücksichtigt werden:

$$\varrho_{xy} = \frac{1}{S} 4 \left[ \sum_{\substack{h=0 \\ (h+k) \text{ gerade}}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_{(hk0)} \cos 2\pi hx \cdot \cos 2\pi ky - \sum_{\substack{h=0 \\ (h+k) \text{ ungerade}}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_{(hk0)} \sin 2\pi hx \cdot \sin 2\pi ky \right].$$

Dazu kommen noch die  $F_{(h0)^-}$ ,  $F_{(0k)^-}$  und  $F_{(00)^-}$ -Werte.  $S$  ist die Fläche des Elementarrechtecks auf der Basis.

Für derartige Projektionen hat M. J. BUEGER<sup>1)</sup> bereits die nötigen Angaben zusammengestellt.

Das beschriebene Verfahren der Fourier-Analyse unter Berücksichtigung der Formenkomplexe ist arbeitersparend, da die Ausnützung der symmetriebedingten Gesetzmäßigkeiten die Rechnung vereinfacht. Statt über die  $h, k, l$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu summieren, geht man von den unterscheidbaren *Formen*

aus, die bei mono- bis digonalen Raumgruppen in sich bereits Vorzeichenwechsel und bei wirteiligen und kubischen auch Indizesvertauschungen enthalten. Die Analogie zur Ausnützung der Gitterkomplexe bei der Bildung der Strukturfaktoren ist so vollkommen, daß auch hier die Charakterentafeln alle Unterlagen für die Berechnung liefern.

Damit ist auch der Einfluß der *Nullpunkts-wahl* auf die Fourier-Analyse klargestellt. Das sogenannte *F-Parallelepiped*<sup>2)</sup> hat die gleichen Symmetrieeigenschaften wie das entsprechende *K-Parallelepiped* im Kristallraum. Es kommt ihm also die gesamte durch die Charakterentafel beschriebene Raumgruppensymmetrie zu, und

nicht etwa nur die Symmetrie der translationsfreien Elemente, die durch den zufälligen Nullpunkt gehen.

Als weiteres Beispiel sei noch die reduzierte Darstellung von  $D_{2h}^5$  in Figur 20 betrachtet.

$d:$

$\frac{h}{2}$	$\begin{array}{ c } \hline \overline{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$
	$\begin{array}{ c } \hline \overline{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$
	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$

$s:$

$\frac{h}{2}$

Fig. 20  
Charakterentafel für  $D_{2h}^5$ .

<sup>1)</sup> M. J. BUEGER, Amer. Mineral. 34, 771 (1949).

<sup>2)</sup> W. NOWACKI, Schweiz. min. petr. Mitt. 30, 147 (1950).



Man liest sofort ab, daß

$$F_{(hkl)} = F_{(\overline{h}\overline{k}\overline{l})} = e^{2\pi i h/2} F_{(\overline{h}kl)} = e^{2\pi i h/2} F_{(h\overline{k}\overline{l})} = e^{2\pi i h/2} F_{(h\overline{k}l)} = e^{2\pi i h/2} F_{(\overline{h}k\overline{l})} \\ = F_{(hkl)} = F_{(\overline{h}\overline{k}\overline{l})}.$$

Das ergibt die folgenden Formenbeiträge:

für  $\langle(hkl)\rangle$ : wenn  $h$  gerade,  $A = 8 a_0 = 8 \cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y \cdot \cos 2\pi l z$ ,  
 $B = 0$ ;  
 wenn  $h$  ungerade,  $A = -8 a_0 = -8 \sin 2\pi h x \cdot \sin 2\pi k y \cdot \cos 2\pi l z$ ,  
 $B = 0$ ;  
 für  $\langle(hk0)\rangle$ : wenn  $h$  gerade,  $A = 4 \cos 2\pi h x \cdot \cos 2\pi k y$ ,  $B = 0$ ;  
 wenn  $h$  ungerade,  $A = -4 \sin 2\pi h x \cdot \sin 2\pi k y$ ,  $B = 0$ ;  
 usw.

## 5. Der Patterson-Punktraum

Aus experimentellen Daten kann man nicht unmittelbar die  $F_{(hkl)}$  bzw.  $A'_{(hkl)}$  und  $B'_{(hkl)}$  bestimmen, sondern nur die  $|F_{(hkl)}|^2$ . Kennt man also von den Amplituden der Streuwellen nur die absoluten Beträge, nicht aber die Vorzeichen bzw. die Winkel  $\varphi$ , welche die Vektoren mit einer Nullage bilden, so bleibt die zugehörige Phase unbestimmt, und man kann daher nicht unmittelbar das  $F$ -Parallelepipед konstruieren und daraus die Struktur ableiten. Es wurden verschiedene Wege eingeschlagen, um diesem Übelstande abzuweichen. Um die 1935 von A. L. PATTERSON eingeführte Darstellungsweise zu erhalten, läßt sich der folgende, schon in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> eingeschlagene Weg verfolgen:

Sind  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  die Koordinaten zweier gleichwertiger Teilchen und setzt man für eine  $(hkl)$ -Ebene  $hx_1 + ky_1 + lz_1 = d_1$  und  $hx_2 + ky_2 + lz_2 = d_2$ , so ist der Betrag des resultierenden Strukturvektors durch

$$2 |F_{(hkl)}| \cdot \cos \frac{2\pi(d_1 - d_2)}{2}$$

und der Winkel  $\varphi$  mit der Nullage durch

$$\frac{2\pi(d_1 + d_2)}{2}$$

gegeben. Den gesamten Strukturvektor erhält man unter Berücksichtigung des Friedelschen Gesetzes zu

$$2 \cos \frac{2\pi(d_1 - d_2)}{2} \cdot \left[ \cos \frac{2\pi(d_1 + d_2)}{2} + \sin \frac{2\pi(d_1 + d_2)}{2} \right].$$

Durch zweckmäßige Zusammenfassung von je zwei gleichwertigen Punkten und Addition der Resultate gelangt man zu den bereits abgeleiteten Strukturfak-

<sup>1)</sup> P. NIGGLI, in: WIEN-HARMS: *Handbuch der Experimentalphysik*, Bd. 7/1 (Leipzig 1928).

toren für einen ganzen Gitterkomplex und ein  $(hkl)$ , oder zum Beitrag eines Formenkomplexes  $\langle(hkl)\rangle$  an die Elektronendichte im Punkte  $xyz$ . Um nun diese Zusammenfassung der Willkür zu entziehen, soll eine *quadratische Matrix*  $\|xyz\|$  aufgestellt werden, welche die Differenzen und Summen der Koordinaten *aller* gleichwertigen Punkte enthält. Wird  $X = 2x$ ,  $Y = 2y$ ,  $Z = 2z$  gesetzt, so zeigt Tabelle 7 die Matrix für  $D_{\frac{1}{2}h}$ , wobei in jedem Feld oben der Differenzenwert und unten der Summenwert hingeschrieben ist.

Tabelle 7

	$xyz$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$xy\bar{z}$
$xyz$	000	$\bar{X}00$	$0\bar{Y}0$	$\bar{X}\bar{Y}0$	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$0Y\bar{Z}$	$\bar{X}0\bar{Z}$	$00\bar{Z}$
	$XYZ$	$0YZ$	$X0Z$	$00Z$	000	$X00$	$0Y0$	$XY0$
$\bar{x}yz$	$X00$	000	$X\bar{Y}0$	$0\bar{Y}0$	$0\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$00\bar{Z}$	$X0\bar{Z}$
	$0YZ$	$\bar{X}YZ$	$00Z$	$\bar{X}0Z$	$\bar{X}00$	000	$\bar{X}Y0$	$0Y0$
$x\bar{y}z$	$0Y0$	$\bar{X}Y0$	000	$\bar{X}00$	$\bar{X}0\bar{Z}$	$00\bar{Z}$	$\bar{X}Y\bar{Z}$	$0Y\bar{Z}$
	$X0Z$	$00Z$	$X\bar{Y}Z$	$0\bar{Y}Z$	$0\bar{Y}0$	$X\bar{Y}0$	000	$X00$
$\bar{x}\bar{y}z$	$XY0$	$0Y0$	$X00$	000	$00\bar{Z}$	$X0\bar{Z}$	$0Y\bar{Z}$	$XY\bar{Z}$
	$00Z$	$\bar{X}0Z$	$0\bar{Y}Z$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}\bar{Y}0$	$0\bar{Y}0$	$\bar{X}00$	000
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$XYZ$	$0YZ$	$X0Z$	$00Z$	000	$X00$	$0Y0$	$XY0$
	000	$\bar{X}00$	$0\bar{Y}0$	$\bar{X}\bar{Y}0$	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$0\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}0\bar{Z}$	$00\bar{Z}$
$x\bar{y}\bar{z}$	$0YZ$	$\bar{X}YZ$	$00Z$	$\bar{X}0Z$	$\bar{X}00$	000	$\bar{X}Y0$	$0Y0$
	$X00$	000	$X\bar{Y}0$	$0\bar{Y}0$	$0\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$00\bar{Z}$	$X0\bar{Z}$
$\bar{x}y\bar{z}$	$X0Z$	$00Z$	$X\bar{Y}Z$	$0\bar{Y}Z$	$0\bar{Y}0$	$X\bar{Y}0$	000	$X00$
	$0Y0$	$\bar{X}Y0$	000	$\bar{X}00$	$\bar{X}0\bar{Z}$	$00\bar{Z}$	$\bar{X}Y\bar{Z}$	$0Y\bar{Z}$
$xy\bar{z}$	$00Z$	$\bar{X}0Z$	$0\bar{Y}Z$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}\bar{Y}0$	$0\bar{Y}0$	$\bar{X}00$	000
	$XY0$	$0Y0$	$X00$	000	$00\bar{Z}$	$X0\bar{Z}$	$0Y\bar{Z}$	$XY\bar{Z}$

In jedem Feld ergibt die Addition der halben beiden einander entsprechenden Wertetripel das Koordinatentripel der zur Spalte gehörigen Kopfzeile. Die 64 Felder der Matrix enthalten sowohl als Differenzenwerte wie als Summenwerte je

8 mal die Tripel 000, also 8mal die Form  $\langle 000 \rangle = 8$

1 mal die Tripel der allgemeinen Form  $\langle XYZ \rangle = 8$

2 mal die Tripel der vierzähligen Form  $\langle 0YZ \rangle = 8$

2 mal die Tripel der vierzähligen Form  $\langle X0Z \rangle = 8$

2 mal die Tripel der vierzähligen Form  $\langle XY0 \rangle = 8$

4 mal die Tripel der zweizähligen Form  $\langle X00 \rangle = 8$

4 mal die Tripel der zweizähligen Form  $\langle 0Y0 \rangle = 8$

4 mal die Tripel der zweizähligen Form  $\langle 00Z \rangle = 8$

Es sind somit achterlei Typen von Tripeln vorhanden. Nennt man verallgemeinernd irgendein Differenzen- oder Summentripel  $XYZ$  (wobei also Vorzeichenwechsel und Nullwerte auftreten können) und die daraus gebildeten Ausdrücke  $hX + kY + lZ$   $D_q$  bzw.  $S_q$ , je nachdem sie sich auf eine Differenz oder Summe beziehen, so wird der Strukturfaktor von  $D_{\frac{1}{2}h}$  für jeden Typus

$$A = \sum_{q=1}^8 \cos 2\pi \frac{D_q}{2} \cos 2\pi \frac{S_q}{2} ; \quad B = \sum_{q=1}^8 \cos 2\pi \frac{D_q}{2} \sin 2\pi \frac{S_q}{2} .$$

Analoge Matrizen lassen sich auch für andere Grundtafeln konstruieren. Bei nichtsymmorphen Raumgruppen sind naturgemäß die Zusatzgrößen in die Matrix aufzunehmen. Während es aber bei den Zusatzgrößen an sich gleichgültig ist, ob  $\pm \frac{1}{2}$  genommen wird, unterscheiden sich nun bei der Bildung der halben Differenzen oder Summen die Werte  $+\frac{1}{4}$  und  $-\frac{1}{4} = +\frac{3}{4}$ . Es ist daher zweckmäßig,  $+\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$  symmetriegemäß so zu verteilen, daß für jeden Koordinatenwert im Gitterkomplex die Summe der Zusatzgrößen verschwindet. Auf diese Weise erhält man für  $C_{2v}^9$  die Matrix  $\parallel xyz \parallel$  der Differenzen und Summen in Tabelle 8.

Tabelle 8

	$xyz$	$\bar{x} - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}$	$x + \frac{1}{2}, \bar{y} + \frac{1}{2}, z$	$\bar{x}, \bar{y}, z + \frac{1}{2}$
$xyz$	$000$ $XYZ$	$\overline{X + \frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, Y - \frac{1}{2}, Z - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \overline{Y - \frac{1}{2}}, 0$ $X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, Z$	$\overline{X \bar{Y} \frac{1}{2}}$ $0, 0, Z + \frac{1}{2}$
$\bar{x} - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}$	$X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, Y - \frac{1}{2}, Z - \frac{1}{2}$	$000$ $X+1, Y-1, Z-1$	$X+1, Y-1, \frac{1}{2}$ $0, 0, Z - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, Y - \frac{1}{2}, 1$ $X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, Z$
$x + \frac{1}{2}, \bar{y} + \frac{1}{2}, z$	$\frac{1}{2}, Y - \frac{1}{2}, 0$ $X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, Z$	$\overline{X+1}, Y-1, \frac{1}{2}$ $0, 0, Z - \frac{1}{2}$	$000$ $X+1, \overline{Y-1}, Z$	$\overline{X + \frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, \overline{Y - \frac{1}{2}}, Z + \frac{1}{2}$
$\bar{x}, \bar{y}, z + \frac{1}{2}$	$X \bar{Y} \frac{1}{2}$ $0, 0, Z + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, Y - \frac{1}{2}, \bar{1}$ $X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, Z$	$X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, \overline{Y - \frac{1}{2}}, Z + \frac{1}{2}$	$000$ $\bar{X}, \bar{Y}, Z + 1$

Daraus kann man wieder die halben Differenzen und Summen ablesen, die  $D_q$ - und  $S_q$ -Werte bilden und den Strukturfaktor ableiten.

Betrachtet man nun die noch nicht halbierten Differenzentripel der Matrix als neue Punktkoordinaten in einem *P-Elementarparallelepiped*, also im sogenannten Patterson-Raum, so kann natürlich  $-\frac{1}{2}$  durch  $+\frac{1}{2}$  und  $\pm 1$  durch 0 ersetzt werden. Das ergibt beispielhaft für die Differenzen von  $C_{2v}^9$  aus der Matrix der Tabelle 8 die Differenzenmatrix der Tabelle 9.



Tabelle 9

000	$X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \bar{Y} - \frac{1}{2}, 0$	$\bar{X} \bar{Y} \frac{1}{2}$
$X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	000	$X \bar{Y} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, Y + \frac{1}{2}, 0$
$\frac{1}{2}, Y + \frac{1}{2}, 0$	$\bar{X} \bar{Y} \frac{1}{2}$	000	$X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
$X Y \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, Y + \frac{1}{2}, 0$	$X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	000

Bezogen auf die Punktsymmetriegruppe  $C_{2v}$  sind darin als Punktgruppen enthalten:  $\langle 000 \rangle$  mit vierfachem Gewicht,  $\langle X + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$  und  $\langle \frac{1}{2}, Y + \frac{1}{2}, 0 \rangle$  je mit zweifachem Gewicht, und  $\langle X Y \frac{1}{2} \rangle$  mit einfachem Gewicht. Schreibt man  $X'$  für  $X + \frac{1}{2}$  und  $Y'$  für  $Y + \frac{1}{2}$ , so entsteht eine neue Matrix, die sich von der entsprechenden Matrix für  $C_{2v}^1$  grundsätzlich nur durch gesetzmäßigen Ersatz von Nullwerten durch Zusatztranslationen  $\frac{1}{2}$  unterscheidet. Die beiden Matrizen sind einander in Tabelle 10 gegenübergestellt.

Tabelle 10

$C_{2v}^0$				$C_{2v}^1$			
000	$\bar{X}' \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bar{Y}' 0$	$\bar{X} \bar{Y} \frac{1}{2}$	000	$\bar{X} 0 0$	$0 \bar{Y} 0$	$\bar{X} \bar{Y} 0$
$X' \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	000	$X \bar{Y} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bar{Y}' 0$	$X 0 0$	000	$X \bar{Y} 0$	$0 \bar{Y} 0$
$\frac{1}{2} Y' 0$	$\bar{X} Y \frac{1}{2}$	000	$\bar{X}' \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$0 Y 0$	$\bar{X} Y 0$	000	$\bar{X} 0 0$
$X Y \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} Y' 0$	$X' \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	000	$X Y 0$	$0 Y 0$	$X 0 0$	000

Als Koordinaten beschreiben diese Differenzentripel die Lage der Endpunkte von *Vektoren*, die je zwei gleichwertige Punkte miteinander verbinden. Wie die Beziehung zum Strukturvektor zeigt, werden dadurch zugleich die Beträge der Strukturvektoren ohne die zugehörige Phase veranschaulicht, also gerade jene Größen, die aus experimentellen Befunden abgeleitet werden können. Das sogenannte Integral von A. L. PATTERSON<sup>1)</sup> führt denn auch zur gleichen Konstruktion. Man versteht nun die Endpunkte der Vektoren nach der Zahl ihres Auftretens in der Matrix mit einem Gewicht und kann sie dann als Pseudoatome oder *Patterson-Punkte* bezeichnen. Von ihnen kann auf die konstituierenden Punktlagen geschlossen werden.

<sup>1)</sup> A. L. PATTERSON, Z. Krist. 90, 517, 543 (1935).

Ein Gitterkomplex der Zähligkeit  $n$  erzeugt  $n$  verschiedene Patterson-Punktkomplexe verschiedener Zähligkeit, die einer allgemeinen und allen zugeordneten speziellen Punktlagen entsprechen. (Vergleiche die acht Patterson-Punktkomplexe in Beispiel  $D_{2h}^1$ .) Jeder einzelne Patterson-Komplex enthält in sich, gleichgültig ob in den Koordinaten der konstituierenden Teilchen Zusatzgrößen auftreten oder nicht, Patterson-Punkte in einer derartigen Anordnung, daß sie durch die Symmetrie der zur Raumgruppe isomorphen *Punktgruppe* verknüpft sind. (Vergleiche das Beispiel  $C_{2v}^9$ .) Die Zusatztranslationen der Raumgruppe äußern sich aber dadurch, daß zur gleichen Matrix gehörige Patterson-Komplexe, verglichen mit dem Fall ohne Zusatzgrößen, gegeneinander verschoben werden. Da nun aber nicht mehr der einzelne Punktkomplex, sondern die *gesamte Matrix* betrachtet werden muß, unterscheiden sich die Patterson-Räume verschiedener Raumgruppen durch die von den Zusatztranslationen, das heißt von den Charakteren  $\neq 1$  abhängigen Lagebeziehungen der Einzelkomplexe voneinander. Die Gesamtmatrix läßt also nicht nur die zur Raumgruppe isomorphe Punktsymmetriegruppe erkennen; sie widerspiegelt die Raumgruppensymmetrie und ist daher unmittelbar aus der Charakterentafel abzuleiten.

Man kann nun auch die einzelnen *Punktkomplexe* der Patterson-Matrix so in einer *Koordinatentafel* anordnen, wie es mit den Punkten einer Form geschah. Für  $D_{2h}^1$  ist das in Figur 21, für  $C_{2v}^1$  in Figur 22 durchgeführt.

		$D_{2h}^1$			
8	<	0	0	0	> $\sigma_1$
4	<	(X)	0	0	> $\alpha_1$
2	<	(O)	Y	Z	> $\alpha_2$
4	<	0	(Y)	0	> $\beta_1$
2	<	X	(O)	Z	> $\beta_2$
4	<	0	0	(Z)	> $\gamma_1$
2	<	X	Y	(O)	> $\gamma_2$
1	<	X	Y	Z	> $\sigma_2$

Fig. 21

Patterson-Punktkomplexe für  $D_{2h}^1$  und  $C_{2v}^1$ .

		$C_{2v}^1$			
4	<	0	0	0	> $\sigma_1$
2	<	(X)	0	0	> $\alpha_1$
		-	-	-	> -
2	<	0	(Y)	0	> $\beta_1$
		-	-	-	> -
		-	-	-	> -
1	<	X	Y	(O)	> $\gamma_2$
		-	-	-	> -

Fig. 22

Links stehen die den Gewichten entsprechenden Faktoren für die Patterson-Komplexe. Die Beziehung zur Charakterentafel gestaltet sich jetzt sehr einfach: Besitzt die Charakterentafel einer Raumgruppe an der Stelle, wo in der Patterson-Punkttable eine Null steht, den Charakter 1, so ist statt 0 der Wert  $\frac{1}{2}$  zu setzen usw. Tritt aber ein Charakter  $\bar{1}$  an der Stelle eines X, Y oder Z der Patterson-Punkttable auf, so bedeutet X, Y und Z nicht mehr  $2x$  bzw.  $2y$  bzw.  $2z$ , sondern als  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  den Wert  $2x + \frac{1}{2}$  bzw.  $2y + \frac{1}{2}$  bzw.  $2z + \frac{1}{2}$ .

usw. Somit läßt sich die Patterson-Tafel unmittelbar aus der Charakterentafel hinschreiben, wie das Beispiel der Figur 23 für  $C_{2v}^9$  zeigt.

$C_{2v}^9$

Charakterentafel					Pattersonpunkttafel			
$x$	$y$	$z$	$\alpha_i$		$4 <$	$0$	$0$	$>$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\alpha_1$		$2 <$	$X'$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$1$	$\beta_1$	$\rightarrow$	$2 <$	$\frac{1}{2}$	$Y'$	$0$
$1$	$1$	$\bar{1}$	$\gamma_2$		$1 <$	$X$	$Y$	$\frac{1}{2}$

$\alpha_1$   
—  
—  
—  
—

$\left. \begin{array}{l} \text{planare} \\ \text{Konz.} \end{array} \right\}$   
  
  
 $\left. \begin{array}{l} \text{lineare} \\ \text{Konz.} \end{array} \right\}$

Fig. 23

Charakterentafel und Patterson-Tafel für  $C_{2v}^9$ .

Will man für eine erste Übersicht zwischen  $X$  und  $X'$  bzw.  $Y$  und  $Y'$  bzw.  $Z$  und  $Z'$  nicht unterscheiden und läßt man die trivialen Patterson-Punkt-komplexe  $\langle 000 \rangle$  sowie den allgemeinen Komplex mit einfachem Gewicht außer Betracht, so geben die  $s$ - und  $d$ -Charaktere sofort über die zu einer Matrix gehörigen Komplexe spezieller Lage Auskunft. Man erhält so die Tabellen, welche M. J. BUERGER<sup>1)</sup> für die sogenannten Harkerschen Linear- und Planar-konzentrationen von Patterson-Punkten abgeleitet hat.

Von *Linearkonzentrationen* spricht man, wenn die Patterson-Punkte zusammengehöriger Komplexe auf gleiche Geraden fallen, also für sie nur ein Koordinatenwert variabel ist. Solche Punkte sind durch Operationen von Symmetrieebenen miteinander verknüpft; in der Grundtafel  $G$  werden für sie die Zeilen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  maßgebend sein.

*Planare Konzentrationen* umfassen Patterson-Punkte, die einer Ebene angehören müssen. Sie besitzen zwei variable Koordinaten und sind in der Grundtafel  $G$  durch die Operationen erster Art der Zeilen  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  miteinander verbunden. Man kann nun unbekümmert um allfällige Verschiebungsgrößen die variablen Koordinaten kurzweg mit  $x, y, z$  bezeichnen. Die konstanten Koordinaten liest man als  $s$ - bzw.  $d$ -Zusatzgrößen unmittelbar aus der Charakterentafel ab, wobei wieder 0 für den Charakter 1,  $\frac{1}{2}$  für  $\bar{1}$ ,  $\frac{1}{4}$  oder  $\frac{3}{4}$  für 0 zu setzen ist. Verschiedene Nullpunktswahl beeinflusst nur die variablen Koordinaten, so daß die Konzentrationen bei unbestimmtem  $x, y, z$  als *Raumgruppenkriterien* verwendet werden können.

So erhält man aus den Charakterentafeln Figur 17 für  $D_{3h}^{24}$  in beiden Aufstellungen dieselben Konzentrationen der Tabelle 11.

<sup>1)</sup> M. J. BUERGER, Acta crystallographica 3, 465 (1950); siehe auch W. NOWACKI, Schweiz. min. petr. Mitt. 30, 147, 304 (1950).



Tabelle 11

Aus Zeile	Konzentra- tionen		Haupt- symmetrie- punkt	Patterson-Punktkomplexe	
	linear	planar		Aufstellung I	Aufstellung II
			000	8 $\langle 000 \rangle$	8 $\langle 000 \rangle$
			000	1 $\langle XY Z \rangle$	1 $\langle X''' Y''' Z''' \rangle$
$\alpha_1$	$x \frac{1}{4} \frac{1}{4}$		$0 \frac{1}{4} \frac{1}{4}$	$2 \langle X \frac{1}{4} \frac{1}{4} \rangle + 2 \langle X' \frac{1}{4} \frac{1}{4} \rangle$	$2 \langle X'' \frac{1}{4} \frac{1}{4} \rangle + 2 \langle X''' \frac{1}{4} \frac{1}{4} \rangle$
$\beta_1$	$\frac{1}{4} y \frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} 0 \frac{1}{4}$	$2 \langle \frac{1}{4} Y \frac{1}{4} \rangle + 2 \langle \frac{1}{4} Y' \frac{1}{4} \rangle$	$2 \langle \frac{1}{4} Y'' \frac{1}{4} \rangle + 2 \langle \frac{1}{4} Y''' \frac{1}{4} \rangle$
$\gamma_1$	$\frac{1}{4} \frac{1}{4} z$		$\frac{1}{4} \frac{1}{4} 0$	$2 \langle \frac{1}{4} \frac{1}{4} Z \rangle + 2 \langle \frac{1}{4} \frac{1}{4} Z' \rangle$	$2 \langle \frac{1}{4} \frac{1}{4} Z'' \rangle + 2 \langle \frac{1}{4} \frac{1}{4} Z''' \rangle$
$\alpha_2$		$0 y z$	000	2 $\langle 0 Y'' Z'' \rangle$	2 $\langle 0 Y Z \rangle$
$\beta_2$		$x 0 y$	000	2 $\langle X'' 0 Z'' \rangle$	2 $\langle X 0 Z \rangle$
$\gamma_2$		$x y 0$	000	2 $\langle X'' Y'' 0 \rangle$	2 $\langle X Y 0 \rangle$

Die Tabelle gibt auch die Zusammensetzung der Patterson-Punktkomplexe für beide Aufstellungen an. Dabei bedeutet

$$X = 2x, \quad X' = 2x + \frac{1}{2}, \quad X'' = 2x + \frac{1}{4}, \quad X''' = 2x + \frac{3}{4} \text{ usw.},$$

und es kommen wegen der Translationsgruppe  $F$  immer noch die Punkte hinzu, die durch Addition von  $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$  entstehen. Man sieht, daß die zu den Linearkonzentrationen gehörigen Komplexe in zwei pinakoidale Formen aufgespalten sind. Sie ergeben sich von selbst als Spezialformen der Grundsymmetrie  $D_{2h}$ , wenn entsprechend der gegenseitigen Verschiebung jeder Komplex auf seinen eigenen Hauptsymmetriepunkt bezogen wird. Wie aus dem Beispiel ersichtlich, erhält man diese Hauptsymmetriepunkte einfach durch Nullsetzen der Variablen in den linearen und planaren Konzentrationen.

Um den Einfluß der Zusatzgrößen noch bildlich zu zeigen, sind in Figur 24 die konstituierenden Teilchenlagen und die Patterson-Punkte im Elementarbereich für einen Gitterkomplex in  $C_{2v}^1$  und  $C_{2v}^2$  dargestellt.

Bei *Kombinationen* mehrerer Gitterkomplexe ist zu berücksichtigen, daß im allgemeinen nur den Teilchen eines und desselben Komplexes das gleiche Streuvermögen zukommt. Das Gewicht eines Patterson-Punktkomplexes wird dann mit  $nZ^2$  in Rechnung gestellt, wobei der Faktor  $n$  wieder angibt, wie oft die Form in der Matrix auftritt, und  $Z$  die Ordnungszahl der Atomsorte im periodischen System bedeutet. Die Behandlung der Kombinationen sei am Fall zweier konstituierender Teilchensorten mit den Gitterkomplexen  $\langle x_1 y_1 z_1 \rangle$ ,  $\langle x_2 y_2 z_2 \rangle$  in  $C_{2v}^1$  und den Ordnungszahlen  $Z_1$  und  $Z_2$  erläutert. Zunächst werden die homogenen Matrizen  $\|x_1 y_1 z_1\|$  und  $\|x_2 y_2 z_2\|$  gebildet; die Differenzentripel entsprechen den Vektoren zwischen gleichwertigen Teilchen, und als Gewicht der Patterson-Komplexe ist  $nZ_1^2$  bzw.  $nZ_2^2$  einzusetzen. Die Vektoren zwischen

ungleichwertigen Teilchen sind durch die Differenzentripel der *heterogenen* Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

gegeben, wobei die Gewichte  $nZ_1Z_2$  betragen. So nimmt etwa die heterogene Patterson-Matrix für zwei Gitterkomplexe allgemeiner Lage in  $C_{2v}^1$  die Form der Tabelle 12 an.

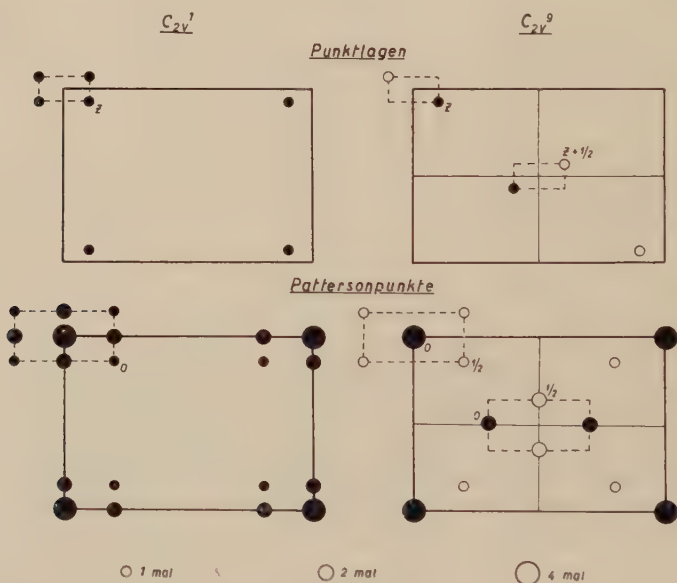


Fig. 24

Projektion der allgemeinen Punktlage und ihrer Patterson-Punkte in  $C_{2v}^1$  und  $C_{2v}^0$ .

Setzt man darin

$$x_1 - x_2 = X^-, \quad y_1 - y_2 = Y^-, \quad z_1 - z_2 = Z^- \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = X^+, \quad y_1 + y_2 = Y^+,$$

so vereinfacht sich die Darstellung zu Tabelle 13.

Bezogen auf die Punktsymmetriegruppe  $C_{2v}$  enthält Tabelle 13 die Patterson-Punktkomplexe

$$\langle X^- Y^- Z^- \rangle, \langle X^+ Y^- Z^- \rangle, \langle X^- Y^+ Z^- \rangle \quad \text{und} \quad \langle X^+ Y^+ Z^- \rangle.$$

Man sieht, daß die heterogene Matrix eine allgemeinere Darstellung bedeutet, welche für  $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$  in den Sonderfall der homogenen Matrix

Tabelle 12

	$x_1 y_1 z_1$	$\bar{x}_1 \bar{y}_1 \bar{z}_1$
$x_2 y_2 z_2$	$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 - x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)$
$\bar{x}_2 y_2 z_2$	$(x_1 + x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 + x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)$
$x_2 \bar{y}_2 z_2$	$(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 - x_2)(y_1 + y_2)(z_1 - z_2)$
$\bar{x}_2 \bar{y}_2 z_2$	$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 - z_2)$
	$x_1 \bar{y}_1 z_1$	$\bar{x}_1 y_1 z_1$
$x_2 y_2 z_2$	$(x_1 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 - x_2)(\bar{y}_1 - y_2)(z_1 - z_2)$
$\bar{x}_2 y_2 z_2$	$(x_1 + x_2)(\bar{y}_1 - y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 + x_2)(\bar{y}_1 - y_2)(z_1 - z_2)$
$x_2 \bar{y}_2 z_2$	$(x_1 - x_2)(\bar{y}_1 + y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 - x_2)(\bar{y}_1 + y_2)(z_1 - z_2)$
$\bar{x}_2 \bar{y}_2 z_2$	$(x_1 + x_2)(\bar{y}_1 + y_2)(z_1 - z_2)$	$(\bar{x}_1 + x_2)(\bar{y}_1 + y_2)(z_1 - z_2)$

Tabelle 13

$X^- Y^- Z^-$	$\bar{X}^+ Y^- Z^-$	$X^- \bar{Y}^+ Z^-$	$\bar{X}^+ \bar{Y}^+ Z^-$
$X^+ Y^- Z^-$	$\bar{X}^- Y^- Z^-$	$X^+ \bar{Y}^+ Z^-$	$\bar{X}^- \bar{Y}^+ Z^-$
$X^- Y^+ Z^-$	$\bar{X}^+ Y^+ Z^-$	$X^- \bar{Y}^- Z^-$	$\bar{X}^+ \bar{Y}^- Z^-$
$X^+ Y^+ Z^-$	$\bar{X}^- Y^+ Z^-$	$X^+ \bar{Y}^- Z^-$	$\bar{X}^- \bar{Y}^- Z^-$

übergeht. Dann wird  $X^- = Y^- = Z^- = 0$  und  $X^+ = X$ ,  $Y^+ = Y$ ,  $Z^+ = Z$ , und zudem werden durch das Auftreten von 0 die Komplexe spezialisiert.

Da allfällige Zusatzgrößen schon in den Ausgangselementen der Matrix enthalten sind und die Übertragung auf Raumgruppen mit mehreren Grundtafeln keine Schwierigkeiten bietet, lassen sich auf diese Weise für beliebige Kombina-



tionen von Gitterkomplexen einer Raumgruppe die in Frage kommenden Patterson-Punktkomplexe ableiten. Oft wird die Patterson-Analyse nur für Ebenen, etwa mit bestimmtem  $z$ , durchgeführt. Derartige *Patterson-Diagramme* werden ohne weiteres aus der dreidimensionalen Darstellung gewonnen, indem man eine Koordinate konstant hält.

## 6. Zusammenfassung

Zur Vereinfachung der Summationsverfahren in der Kristallstrukturlehre lassen sich die Symmetrieeigenschaften der Raumgruppen ausnützen, indem man eine gegebene Mannigfaltigkeit in Formen gleichwertiger Elemente zerlegt. Die für diese Zwecke angemessene Darstellung der Raumgruppensymmetrie ist durch die *Charakterentafeln* gegeben. Aus ihnen gehen die geometrischen Gesetzmäßigkeiten für alle wichtigen Verfahren unmittelbar hervor.

(Eingegangen: 6. 4. 1951.)

# Über Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen und über gedämpfte Schwingungen von Stäben

VON FRITZ GASSMANN, ETH., Zürich

## Einleitung

- (1) Die elastischen Schwingungen eines festen Körpers, der in der vorliegenden Arbeit kurz Schwinger genannt wird, sind in Wirklichkeit stets gedämpft. Für viele Betrachtungen kann man die Dämpfung vernachlässigen. Wenn man aber zum Beispiel erzwungene Schwingungen betrachtet und für den Fall von Resonanz die Beanspruchungen, die der Schwinger erleidet, berechnen will, muß man die Dämpfung berücksichtigen. Ist der Schwinger irgendwo eingespannt, das heißt an einem ebenfalls festen elastischen Körper befestigt, der im folgenden *Träger* genannt wird, so können wir die Ursachen der Dämpfung schematisch in drei Arten einteilen:
  - a) *Innere Dämpfung* = Verwandlung elastischer Energie in Wärme im Innern des Schwingers.
  - b) *Äußere Dämpfung* = Bewegungswiderstände, die an der freien Oberfläche des Schwingers auftreten, beispielsweise weil er in eine Flüssigkeit getaucht oder von Luft umgeben ist.
  - c) *Abstrahlungsdämpfung*: Der Schwinger deformiert auch den Träger und verliert an Schwingungsenergie, weil von der Einspannstelle aus elastische Wellen in den Träger hinein ausstrahlen.

In vielen Fällen, wie zum Beispiel im Falle gedämpfter Stabschwingungen, ist eine besonders einfache Behandlung der Abstrahlungsdämpfung gerechtfertigt. Sie besteht darin, daß man die *Kontaktfläche* zwischen dem Schwinger und dem Träger wohl als beweglich, aber als *undeformierbar* betrachtet. Die Abstrahlungsdämpfung läßt sich dann in zwei Stufen behandeln. Vorerst braucht nämlich nur der Träger zusammen mit der Kontaktfläche betrachtet zu werden. Nachher werden die Bewegungen des Schwingers behandelt, wobei die Abstrahlungsdämpfung dann nur noch in den Randbedingungen erscheint. Diese Zweiteilung des Problems hat oft auch praktische Bedeutung. Ist der Schwinger zum Beispiel ein Bauwerk, so ist der Träger der Untergrund, und die Abstrahlungsdämpfung stellt oft den Hauptanteil aller Dämpfungen dar. Die Abstrahlungseigenschaften des Untergrundes können dann mit Hilfe von Schwingungsmaschinen schon vor Errichtung des Bauwerkes untersucht werden.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der Träger für eine gegebene, undeformierbare Kontaktfläche durch dynamische Federungsgrößen charakterisiert (Abschnitt A). Dann werden für einige einfache Beispiele die dynamischen Federungsgrößen explizite berechnet (Abschnitte B und C). Unter Verwendung des Begriffs der dynamischen Federungsgrößen werden Längs-, Biegungs- und Torsionsschwingungen schlanker Stäbe als Schwinger mit innerer, äußerer und Abstrahlungsdämpfung behandelt (Abschnitte E, F und G), wobei für die innere Dämpfung ein schon in einer früheren Arbeit gegebener Ansatz (Abschnitt D) auf Stabschwingungen übertragen wird. Schließlich ist an einem Beispiel schwach gedämpfter Stablängsschwingungen gezeigt, wie man durch geeignete Schwingungsversuche die Dämpfungsgrößen einzeln ermitteln kann (Abschnitt H).

## A. Dynamische Federungsgrößen

### Bezeichnungen

- (2)  $j = \sqrt{-1}$ ,  $R$  = Realteil,  $J$  = Imaginärteil einer komplexen Größe, also zum Beispiel  $z = R(z) + j J(z)$ .
- (3) Mit einem  $\bar{\phantom{z}}$  über einem Zeichen wird die konjugiert komplexe Größe bezeichnet, also  $\bar{z} = R(z) - j J(z)$ .
- (4)  $e = 2,718\dots$  = Basis der natürlichen Logarithmen,  $t$  = Zeit,  $\omega > 0$  unabhängig von  $t$ .
- (5) Jede Größe, die mit dem Zeichen  $\sim$  überstrichen ist, soll von  $t$  in Form des Faktors  $e^{j\omega t}$  abhängen, also zum Beispiel  $\tilde{f} = f e^{j\omega t}$ ,  $f$  unabhängig von  $t$ .
- (6)  $x_1, x_2, x_3$  = rechtwinklige Koordinaten mit Koordinatennullpunkt  $O_0$  und mit  $e_1, e_2, e_3$  als Einheitsvektoren in den positiven Achsenrichtungen.

### Der Träger und sein Schwingungszustand

- (7) Der Träger sei ein fester, endlicher oder ins Unendliche reichender Körper, der weder homogen noch isotrop zu sein braucht. Die Kontaktfläche  $F_0$  sei ein endliches Stück seiner Oberfläche, das als undeformierbar vorausgesetzt werde. Auf  $F_0$  wirke von außen ein System von mit der Frequenz  $\omega/(2\pi)$  und konstanter Amplitude pulsierenden Kräften. Wir nehmen an, der Träger werde dadurch in einen stationären Schwingungszustand mit gleicher Frequenz versetzt.  $O$  sei ein mit  $F_0$  fest verbundener Punkt, der in der

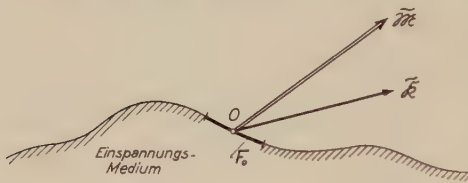


Fig. 1

Ruhelage mit  $O_0$  zusammenfalle. Das Kräftesystem werde in den Punkt  $O$  auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar reduziert. In rechtwinkligen Komponenten geschrieben sei  $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{K}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{K}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{K}_3 \mathbf{e}_3$  die Einzelkraft und  $\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{K}_4 \mathbf{e}_1 + \tilde{K}_5 \mathbf{e}_2 + \tilde{K}_6 \mathbf{e}_3$  das Drehmoment.

- (8) Mit dem Träger befindet sich auch  $F_0$  in einem stationären Schwingungszustand mit der Frequenz  $\omega/(2\pi)$ . Die Bewegungen von  $F_0$  seien klein. Sie lassen sich beschreiben durch den Vektor  $O_0\tilde{O} = \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{q}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{q}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{q}_3 \mathbf{e}_3$  und durch die drei kleinen Winkel  $\tilde{q}_4, \tilde{q}_5, \tilde{q}_6$ , um die man  $F_0$  um die Koordinatenachsen drehen muß, um zusammen mit der Parallelverschiebung  $\tilde{\mathbf{q}}$  zu der in einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  eingenommenen Lage zu gelangen.

### Einführung der dynamischen Federungsgrößen

- (9) Vom Träger sei lediglich vorausgesetzt, daß er sich gegenüber dem Kräftesystem  $\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{M}}$  linear verhalte, das heißt, daß folgende sechs Gleichungen erfüllt seien:

$$\tilde{K}_i = \sum_{k=1}^6 \Gamma_{ik}(\omega) \tilde{q}_k. \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

(Die Indizes  $i$  und  $k$  durchlaufen im folgenden unabhängig voneinander die ganzen Zahlen von 1 bis 6.) Die 36 im allgemeinen komplexen Größen  $\Gamma_{ik}$  sollen die dynamischen Federungsgrößen des Trägers in bezug auf die Kontaktfläche  $F_0$  genannt werden. Sie hängen von  $F_0$  und  $\omega$  ab, jedoch nicht von den  $K_i$  und den  $q_k$ .

- (10) Die Energie, die im Mittel in der Zeiteinheit durch das Kräftesystem  $\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{M}}$  in den Träger gesteckt wird, ist

$$W = \sum_{i=1}^6 \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} R(\tilde{K}_i) R\left(\frac{d\tilde{q}_i}{dt}\right) dt = \frac{m}{2} \sum_{i,k} J(\Gamma_{ik} \tilde{q}_i \tilde{q}_k).$$



- (11) Der Fall  $\Gamma_{ik} = 0$  für  $i \neq k$  sei dynamische Symmetrie des Trägers in bezug auf  $F_0$  genannt. In diesem Falle ist

$$W = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^6 J(\Gamma_{ii}) |q_i|^2.$$

## B. Der halbunendliche Stab als Beispiel eines Trägers

### Bezeichnungen

- (12) Der Träger sei ein prismatischer, halbunendlicher Stab mit Mantellinien in  $x_3$ -Richtung. Er erstrecke sich von  $x_3 = 0$  bis  $x_3 = -\infty$ . Die Endfläche in der Ebene  $x_3 = 0$  ist gleichzeitig die Kontaktfläche  $F_0$ .  
 $O_0$  sei der Schwerpunkt  $F_0$  in der Ruhelage.
- (13) Das Material, aus dem der Träger besteht, sei homogen, isotrop und genüge dem Hookeschen Elastizitätsgesetz.  $E$  = Youngscher Modul,  $\mu$  = Schubmodul,  $\varrho$  = Dichte,  $F$  = Flächeninhalt des Stabquerschnittes,  $J_1, J_2$  = Flächenträgheitsmomente von  $F_0$  in bezug auf die  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse.  $J = J_1 + J_2$ .
- (14)  $\tilde{y}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{y}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{y}_3 \mathbf{e}_3$  = Ausschlagsvektor des Schwerpunktes irgendeines Stabquerschnittes während der Schwingungen des Stabes.  $\tilde{\varphi}_3$  = kleiner Drehwinkel des Stabquerschnittes um die  $x_3$ -Achse bei Torsionsschwingungen.

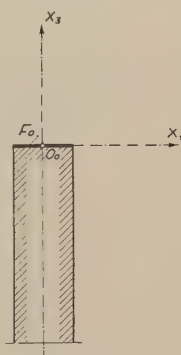


Fig. 2

### Längsschwingungen

- (15) Den Längsschwingungen  $\tilde{y}_3(x_3, t)$  des Trägers sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}_3}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{y}_3}{\partial x_3^2} = 0$$

mit  $c = +\sqrt{E/\varrho}$  zugrunde gelegt.

- (16) Als Lösung kommt eine in  $-x_3$ -Richtung sich fortpflanzende Welle  $\tilde{y}_3 = \tilde{y}_3(x_3 + c t)$  in Frage. Wegen  $\tilde{y}_3 = y_3(x_3) e^{j\omega t}$  [siehe (5)] führt dies auf  $\tilde{y}_3 = A_3 e^{j(\omega/c)(x_3 + ct)}$ , wo  $A_3$  eine Konstante ist.
- (17) Für  $x_3 = 0$  gilt die Randbedingung  $\tilde{K}_3 = E F (\partial \tilde{y}_3 / \partial x_3)$ .
- (18) Da von den sechs Federungsgrößen  $\Gamma_{3k}$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , einzig  $\Gamma_{33}$  von Null verschieden ist, gilt nach (9) die Gleichung  $\tilde{K}_3 = \Gamma_{33} \tilde{q}_3$ .
- (19) Wegen  $\tilde{y}_3 = \tilde{q}_3$  für  $x_3 = 0$  führt die Kombination von (15) bis (18) auf

$$\Gamma_{33} = j \omega F \sqrt{E \varrho}.$$

### Biegungsschwingungen

- (20) Zusätzlich zu (12) und (13) sei vorausgesetzt,  $F_0$  sei symmetrisch in bezug auf die  $x_1$ -Achse. Für die Biegungsschwingungen in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene erfüllt  $\tilde{y}_1(x_3, t)$  die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}_1}{\partial t^2} + \frac{E J_2}{F \varrho} \cdot \frac{\partial^4 \tilde{y}_1}{\partial x_3^4} = 0.$$

- (21) Die allgemeine Lösung lautet

$$\tilde{y}_1 = e^{j\omega t} (A_{11} e^{\alpha_1 x_3} + A_{12} e^{j\alpha_1 x_3} + A_{13} e^{-\alpha_1 x_3} + A_{14} e^{-j\alpha_1 x_3})$$

mit  $\alpha_1 = + \sqrt[4]{F \varrho \omega^2 / (E J_2)}$ .

Die  $A_{1i}$  sind konstante Größen. Für eine in  $-x_3$ -Richtung ausstrahlende Welle muß  $A_{13} = A_{14} = 0$  sein.

- (22) Für einen allgemeinen Querschnitt ist  $E J_2 (\partial^2 \tilde{y}_1 / \partial x_3^2)$  das Biegemoment und  $-E J_2 (\partial^3 \tilde{y}_1 / \partial x_3^3)$  die Querkraft.

Für  $x_3 = 0$  ist

$$\tilde{y}_1 = \tilde{q}_1, \quad \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x_3} = \tilde{q}_5, \quad \tilde{K}_1 = \Gamma_{11} \tilde{q}_1 + \Gamma_{15} \tilde{q}_5$$

die Querkraft und

$$\tilde{K}_5 = \Gamma_{51} \tilde{q}_1 + \Gamma_{55} \tilde{q}_5$$

das Biegemoment.

- (23) Der spezielle Ansatz  $\tilde{q}_5 = 0$  liefert durch Kombination von (21) und (22) Gleichungen für  $\Gamma_{11}$  und  $\Gamma_{51}$ , der Ansatz  $\tilde{q}_1 = 0$  solche für  $\Gamma_{15}$  und  $\Gamma_{55}$ . Man erhält

$$\Gamma_{11} = (-1 + j) E J_2 \alpha_1^3, \quad \Gamma_{15} = \Gamma_{51} = -j E J_2 \alpha_1^2, \quad \Gamma_{55} = (1 + j) E J_2 \alpha_1.$$

- (24) Für Biegungsschwingungen in der  $(x_2, x_3)$ -Ebene erhält man entsprechend

$$\alpha_2 = + \sqrt[4]{\frac{F \varrho \omega^2}{E J_1}}, \quad \Gamma_{22} = (-1 + j) E J_1 \alpha_2^3,$$

$$\Gamma_{24} = \Gamma_{42} = -j E J_1 \alpha_2^2, \quad \Gamma_{44} = (1 + j) E J_1 \alpha_2.$$

Die andern Koeffizienten  $\Gamma_{1i}$ ,  $\Gamma_{2i}$ ,  $\Gamma_{4i}$  und  $\Gamma_{5i}$  sind Null.

### Torsionsschwingungen

- (25) Zusätzlich zu (12) und (13) sei vorausgesetzt,  $F_0$  sei ein Kreisring oder ein Vollkreis. Für Torsionsschwingungen gilt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_3}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_3}{\partial x_3^2} = 0.$$

(26) In einem allgemeinen Querschnitt ist das Torsionsmoment  $\mu J (\partial \tilde{q}_3 / \partial x_3)$ .

Für  $x_3 = 0$  ist dieses Moment  $\tilde{K}_6 = \Gamma_{66} \tilde{q}_6$ .

(27) Entsprechend wie in (15) bis (19) für Längsschwingungen erhält man

$$\Gamma_{66} = j \omega J \sqrt{\mu \rho},$$

währenddem die andern Koeffizienten  $\Gamma_{6i}$  Null sind. Für einen halbumendlichen Stab mit einem Kreisring oder Vollkreis als Querschnitt sind somit alle 36 in (9) vorkommenden dynamischen Federungsgrößen  $\Gamma_{ik}$  berechnet.

### C. Der unendliche elastische Raum als weiteres Beispiel eines Trägers

#### Bezeichnungen

(28) Der allseitig unbegrenzte, dreidimensionale Raum sei mit einem homogenen, isotropen, dem Hookeschen Elastizitätsgesetz genügenden Medium gefüllt.

$\rho$  = Dichte,  $E$  = Youngscher Modul,

$\mu$  = Schubmodul,

$\lambda = [\mu (E - 2\mu)] / (3\mu - E)$   
= Lamésche Elastizitätskonstante,

$v = + \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$   
= Fortpflanzungsgeschwindigkeit  
der Longitudinalwellen,

$w = + \sqrt{\mu / \rho}$   
= Fortpflanzungsgeschwindigkeit  
der Transversalwellen.

(29)  $r, \vartheta, \psi$  seien Kugelkoordinaten mit dem Zentrum  $O_0$ . Sie hängen mit den rechtwinkligen zusammen durch die Gleichungen

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \psi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \psi, \quad x_3 = r \cos \vartheta.$$

Die Einheitsvektoren in den Richtungen der Kugelkoordinaten seien

$$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\psi.$$

$$(30) \quad \tilde{s} = \tilde{s}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{s}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{s}_3 \mathbf{e}_3 = \tilde{s}_r \mathbf{e}_r + \tilde{s}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \tilde{s}_\psi \mathbf{e}_\psi$$

= Ausschlagsvektor bei kleinen Deformationen des Trägers.

(31)  $\tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \dots$  = Komponenten des Spannungstensors, bezogen auf die rechtwinkligen Koordinaten,

$\tilde{p}_{rr}, \tilde{p}_{r\vartheta}, \dots$  = Komponenten des Spannungstensors, bezogen auf die Kugelkoordinaten.

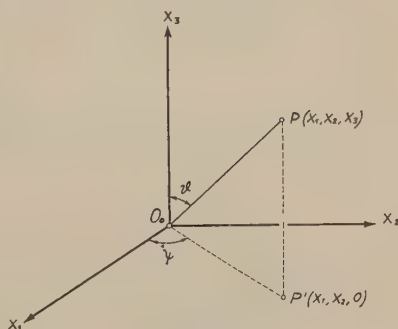


Fig. 3



*Die pulsierende Kugel als Spannungsvorrichtung*

- (32) Im Träger befinde sich ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $O_0$ , der der Einfachheit halber mit einer trägheitslosen, inkompressiblen Flüssigkeit angefüllt gedacht werde. Aus dem Träger und der Flüssigkeit sei ein prismatischer Kanal ( $F$  = Flächeninhalt des Querschnittes) in  $x_3$ -Richtung mit starrer Wandung ausgespart, in dem sich die ebene Fläche  $F_0$  wie ein Kolben in  $x_3$ -Richtung translatorisch bewege. Um

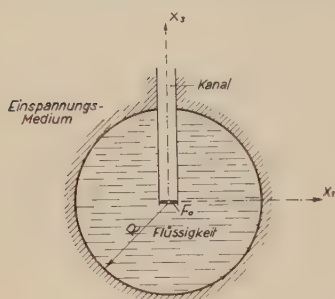


Fig. 4

einen bestimmten Fall zu fixieren, soll der Schwerpunkt von  $F_0$  in der Ruhelage mit  $O_0$  zusammenfallen. Der Kolben  $F_0$  ist in diesem Beispiel also so geführt, daß er nur noch einen Freiheitsgrad besitzt.

- (33) Gemäß (7) ist  $\tilde{K}_3$  die von außen, das heißt hier vom Kanalhohlraum her, auf die Fläche  $F_0$  ausgeübte periodische Einzelkraft in  $x_3$ -Richtung. Die Kraft erzeugt in der Flüssigkeit die hydrostatische Normalspannung  $\tilde{p} = \tilde{K}_3/F_0$  die ihrerseits periodische Änderungen  $\tilde{s}_R$  des Radius des Hohlraumes bewirkt.
- (34) In den Träger werden von der Wandung des Hohlraumes aus homogene elastische longitudinale Kugelwellen

$$\tilde{s}_r = -\frac{s_0}{r} \left( \frac{1}{r} + j \frac{\omega}{v} \right) e^{-j(\omega/v)r} e^{j\omega t} \quad (s_0 = \text{Konstante})$$

ausgestrahlt, wenn man voraussetzt, daß der größte Durchmesser des Kanalquerschnittes so klein gegen  $R$  ist, daß man die durch den Kanal verursachten Störungen der Kugelsymmetrie der Wellen vernachlässigen kann<sup>1)</sup>.

- (35) Die Inkompressibilität der Flüssigkeit gibt zwischen den kleinen Verschiebungen  $\tilde{q}_3$  des Kolbens  $F_0$  und den Änderungen  $\tilde{s}_R$  (= Wert von  $\tilde{s}_r$  für  $r = R$ ) des Radius des Hohlraumes die Näherungsgleichung

$$F \tilde{q}_3 = -4 \pi R^2 \tilde{s}_R.$$

- (36) Im Träger besteht die Elastizitätsgleichung

$$\tilde{p}_{rr} - \lambda \left( \frac{\partial \tilde{s}_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \tilde{s}_r \right) + 2 \mu \frac{\partial \tilde{s}_r}{\partial r}.$$

Für  $r = R$  ist  $\tilde{p}_{rr} = \tilde{p}$ .

<sup>1)</sup> Über Elastizitätsgleichungen in Kugelkoordinaten und über elastische Wellen in homogenen, isotropen Medien möge man zum Beispiel die folgenden Arbeiten zu Rate ziehen: H. LAMB, *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*, Phil. Trans. [A] 203, 1–42 (1904). – A. E. H. LOVE, *Lehrbuch der Elastizität*, deutsche Ausgabe von A. TIMPE (Teubner, Leipzig 1907)

(37) Durch Kombination der Gleichungen (33) bis (36) und (28) erhält man für die dynamische Federungsgröße

$$\Gamma_{33} = \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{q}_3} = \frac{F^2 \varrho}{4 \pi R} \left( 4 \frac{w^2}{R^2} - \frac{v^2 \omega^2}{v^2 + R^2 \omega^2} + j \frac{v R \omega^3}{v^2 + R^2 \omega^2} \right)$$

und nach (11) für die im Mittel in der Zeiteinheit abgestrahlte Energie

$$W = \frac{F^2 \varrho v |q_3|^2}{8 \pi} \cdot \frac{\omega^4}{v^2 + R^2 \omega^2}.$$

Die starre Kugel als Einspannungsvorrichtung

(38) An Stelle der Flüssigkeit in (32) und der Führung von  $F_0$  durch den Kanal denke man sich  $F_0$  starr mit der Wandung des Hohlraumes verbunden. Diese Wandung selbst sei als starre trägheitslose Fläche ausgebildet, die ohne zu gleiten am umgebenden elastischen Medium haften soll. Das starre Gebilde, bestehend aus  $F_0$  und Wandung, hat demnach sechs Freiheitsgrade, und die Einspannungsvorrichtung ist im Sinne von (11) dynamisch symmetrisch. Infolge der Kugelsymmetrie bestehen überdies folgende Gleichungen:

$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33} = \Gamma_T =$  dynamische Federungsgröße für Translationen der Kugel,

$\Gamma_{44} = \Gamma_{55} = \Gamma_{66} = \Gamma_R =$  dynamische Federungsgröße für Rotationen der Kugel.

(39) Es soll zunächst  $\Gamma_R$  bestimmt werden. Zu diesem Zwecke seien zum Beispiel kleine Rotationen der starren Kugel um die  $x_3$ -Achse betrachtet. Gemäß (7) bis (11) ist  $\tilde{K}_6$  das Drehmoment in bezug auf die  $x_3$ -Achse,  $\tilde{q}_6$  der kleine Drehwinkel der Kugel und

$$\Gamma_{66} = \Gamma_R = \frac{\tilde{K}_6}{\tilde{q}_6}.$$

(40) Die Rotationen der Kugel erzeugen im Träger radial ausstrahlende Transversalwellen:

$$\tilde{s}_r = \tilde{s}_\vartheta = 0, \quad \tilde{s}_\varphi = \frac{s_0}{r} \left( \frac{1}{r} + j \frac{\omega}{w} \right) s^{-j(\omega/w)r} \sin \vartheta e^{j\omega t}.$$

(41) Für  $r = R$  ist der Drehwinkel der Kugel  $\tilde{s}_\varphi/(R \sin \vartheta) = \tilde{q}_6$ .

(42) Die Elastizitätsgleichung

$$\tilde{p}_{\varphi r} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{s}_\varphi}{\partial r} - \frac{\tilde{s}_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \tilde{s}_r}{\partial \varphi} \right)$$

liefert unter Benützung von (40) für  $r = R$  die Tangentialspannungen auf

der starren Kugelfläche und durch Integration über diese Fläche  $\tilde{K}_6$ . Man erhält so nach (41) und (39)

$$(43) \quad \Gamma_R = \frac{8 \pi \mu R^3}{3 w} \cdot \frac{w (3 w^2 + 2 \omega^2 R^2) + j R^3 \omega^3}{w^2 + \omega^2 R^2}.$$

(44) Zur Bestimmung von  $\Gamma_T$  seien kleine Parallelverschiebungen der starren Kugel in  $x_3$ -Richtung betrachtet. Gemäß (7) bis (11) ist  $\tilde{K}_3$  die  $x_3$ -Komponente der Einzelkraft,  $\tilde{q}_3$  die kleine Verschiebung der Kugel in  $x_3$ -Richtung und  $\Gamma_{33} = \Gamma_T = \tilde{K}_3 / \tilde{q}_3$ .

(45) Die Bewegungen der starren Kugel in  $x_3$ -Richtung erzeugen im Träger radial ausstrahlende, elastische Wellen, die eine Überlagerung von Longitudinal- und von Transversalwellen darstellen und durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\tilde{s} = e^{j \omega t} (\text{grad } \mathfrak{U} + \text{rot } \mathfrak{B}),$$

$$\mathfrak{U} = U_0 \mathbf{e}_3 \text{ grad } H_v(r), \quad U_0 = \text{skalare Konstante, } \mathbf{e}_3 \text{ siehe (6),}$$

$$\mathfrak{B} = h U_0 [\mathbf{e}_3, \text{grad } H_w(r)], \quad [\dots, \dots] = \text{Vektorprodukt,}$$

$$H_v(r) = \frac{1}{r} e^{-j(\omega/v)r}, \quad H'_v(r) = \frac{1}{j} \cdot \frac{\partial H_v}{\partial r}, \quad H''_v(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H'_v}{\partial r} \quad \text{usw.},$$

$$H_w(r) = \frac{1}{r} e^{-j(\omega/w)r} \quad \text{usw.}, \quad h = \frac{H''_v(R)}{H''_w(R)}.$$

(46) Für die Punkte auf der starren Kugelfläche vom Radius  $R$  ergibt sich daraus die Verschiebung

$$\tilde{s} = \tilde{q}_3 \mathbf{e}_3 = e^{j \omega t} U_0 [H''(R) R^2 + H'_v(R) + 2 h H'_w(R)] \mathbf{e}_3.$$

(47) Im Träger bestehen unter anderen folgende Elastizitätsgleichungen:

$$\tilde{p}_{13} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_1} \right), \quad \tilde{p}_{33} = \lambda \left( \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_2} \right) + (\lambda + 2 \mu) \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_3}.$$

(48)  $\tilde{p}_{r3} = \tilde{p}_{13} \sin \vartheta + \tilde{p}_{23} \cos \vartheta$  ist für  $r = R$  die  $x_3$ -Komponente der Spannung, die auf ein Flächenelement der starren Kugelfläche wirkt. Die Integration über die ganze Kugelfläche gibt unter Benützung von (47) und (45)

$$(49) \quad \tilde{K}_3 = - \frac{20 \pi}{3} U_0 (\lambda + 4 \mu) R^3 H''_v(R) e^{j \omega t} \\ - \frac{4 \pi}{3} U_0 R^5 [(\lambda + 2 \mu) H'''_v(R) + 2 \mu h H'''_w(R)] e^{j \omega t}.$$

(50) Die Kombination von (44), (46) und (49) ergibt

$$\Gamma_T = \frac{4 \pi}{3} \rho R v^2 \frac{\kappa_0 + \kappa_1 X + \kappa_2 X^2 + \kappa_3 X^3 + \kappa_4 X^4 + \kappa_5 X^5}{(1 + 2 \kappa^2)^2 - \kappa^2 (4 \kappa - 1) X^2 + \kappa^4 X^4}$$



mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{v}{w}, & X &= j \frac{R}{v} \omega, \\ \kappa_0 &= g (1 + 2 \kappa^2), & \kappa_1 &= g (1 + 2 \kappa^3), \\ \kappa_2 &= 2 - 13 \kappa^2 + 2 \kappa^4, & \kappa_3 &= -3 \kappa^2 (1 + 2 \kappa), \\ \kappa_4 &= \kappa^3 (4 - \kappa), & \kappa_5 &= \kappa^3 (2 + \kappa). \end{aligned}$$

D. Innere Dämpfung isotroper, elastischer Medien

Bezeichnungen

(51) Anknüpfend an (31) sei

$$\tilde{p} = \frac{1}{3} (\tilde{p}_{11} + \tilde{p}_{22} + \tilde{p}_{33})$$

die mittlere Normalspannung und

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{11} - \tilde{p} & \tilde{p}_{12} & \tilde{p}_{13} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} - \tilde{p} & \tilde{p}_{23} \\ \tilde{p}_{31} & \tilde{p}_{32} & \tilde{p}_{33} - \tilde{p} \end{pmatrix} \text{ der Spannungsdeviator.}$$

(52)

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_3} \right)$$

ist die mittlere Dehnung und

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_1} - \tilde{\Theta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_2} - \tilde{\Theta} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial \tilde{s}_3}{\partial x_3} - \tilde{\Theta} \end{pmatrix}$$

der Verformungsdeviator.

(53) Ist  $g(t)$  irgendeine Funktion von  $t$ , so ist

$$L_i(g) = a_{i0} g + a_{i1} \frac{\partial g}{\partial t} + a_{i2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \cdots + a_{in_i} \frac{\partial^{n_i} g}{\partial t^{n_i}},$$

wobei die Koeffizienten  $a_{i\nu}$  von  $t$  unabhängig sind.  $i$  steht für irgendeinen Zahlen- oder Buchstabenindex.

(54) Die Anwendung des linearen Operators  $L_i$  auf die Funktion  $\tilde{f} = f e^{i \omega t}$  [siehe (5)] gibt  $L_i(\tilde{f}) = \tilde{f} P_i$ , wo  $P_i$  das zum Operator  $L_i$  gehörende Polynom

$$P_i = a_{i0} + a_{i1}(j \omega) + a_{i2}(j \omega)^2 + \cdots + a_{in_i}(j \omega)^{n_i}$$

ist.

- (55) Für den aus zwei Operatoren  $L_i$  und  $L_k$  zusammengesetzten Operator  $L_0$  gilt das Kommutativgesetz, so daß man  $L_0$  einfach als Produkt von  $L_i$  und  $L_k$  schreiben kann:

$$L_0 = L_k [L_i(g)] = L_i [L_k(g)] = L_i L_k(g),$$

entsprechend ist  $P_0 = P_i P_k$  das gewöhnliche Produkt aus  $P_i$  und  $P_k$ .

- (56) Das Resultat der Anwendung eines linearen Operators auf einen gegebenen Tensor, wie zum Beispiel  $L_i(\tilde{I})$ , ist der Tensor, den man aus dem gegebenen durch Anwendung des Operators auf alle Tensorkomponenten erhält.

### *Ein linearer Ansatz für innere Dämpfung*

- (57) Das Hookesche Gesetz für isotrope Medien läßt sich in die beiden Gleichungen  $\tilde{p} = 3k\tilde{\Theta}$  und  $\tilde{I} = 2\mu\tilde{\Phi}$  zusammenfassen, wobei  $k = \lambda + (2\mu/3)$  der Kompressionsmodul ist.
- (58) Für eine Reihe von in der Literatur behandelten Ansätzen über innere Dämpfung kann man eine einheitliche Behandlung erzielen, wenn man die beiden Gleichungen (57) durch Einführung von linearen Operatoren nach GASSMANN<sup>1)</sup> verallgemeinert:

$$L_p(\tilde{p}) = L_\Theta(\tilde{\Theta}), \quad L_I(\tilde{I}) = L_\Phi(\tilde{\Phi}).$$

- (59) In folgender Tabelle sind für einige bekannte Fälle die vier eingeführten Operatoren zusammengestellt.

Bezeichnung in	$L_p$	$L_\Theta$	$L_I$	$L_\Phi$
GASSMANN <sup>1)</sup> . . .	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$
HOOKE . . . . .	1	$3k$	1	$2\mu$
MAXWELL . . . . .	1	$3k$	$\eta + \frac{\partial}{\partial t}$	$2\mu \frac{\partial}{\partial t}$
VOIGT . . . . .	1	$3k$	1	$2\mu + 2\eta' \frac{\partial}{\partial t}$
JEFFREYS . . . . .	1	$3k$	$\eta + \frac{\partial}{\partial t}$	$2\mu \frac{\partial}{\partial t} + 2\eta' \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
SEZAWA . . . . .	1	$3k + 3k' \frac{\partial}{\partial t}$	1	$2\mu + 2\eta' \frac{\partial}{\partial t}$

<sup>1)</sup> F. GASSMANN, *Über kleine Bewegungen in nicht vollkommen elastischen Körpern*, Mitt. Nr. 11 Inst. Geophys. ETH. (März 1949) und Schweiz. Bauztg. 4, Nr. 4 (1949).

## E. Gedämpfte Längsschwingungen von Stäben

### Herleitung der Schwingungsdifferentialgleichung

- (60) Bei der Behandlung des halbinendlichen Stabes als Träger wurde die Differentialgleichung für die ungedämpften Längsschwingungen eines schlanken prismatischen Stabes in der einfachen Form (15), die sich auf das Hookesche Gesetz stützt, verwendet. Nunmehr sollen gedämpfte Längsschwingungen eines Stabes von unendlicher Länge, dieser im Sinne von (1) als Schwinger betrachtet, behandelt werden. Um dafür die Differentialgleichung zu erhalten, wird Gleichung (15) dadurch verallgemeinert, daß das Hookesche Gesetz durch den Ansatz (58) für innere Dämpfung ersetzt und gleichzeitig ein einfacher Ansatz für die äußere Dämpfung eingeführt wird. Zu diesem Zwecke ist ein Stück des Stabes zwischen den Querschnitten  $x_3$  und  $x_3 + dx_3$  zu betrachten.  $\tilde{s}$  sei wie in (30) die elastische Verschiebung der einzelnen Punkte des Stabstückes, wobei  $\tilde{s}_3 = \tilde{y}_3$  zu setzen ist. Die in (51) eingeführten Größen zur Beschreibung des Spannungs- und des Verformungszustandes sind im vorliegenden Falle

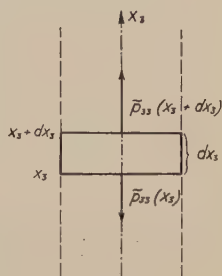


Fig. 5

$$\tilde{p} = \frac{1}{3} \tilde{p}_{33},$$

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \tilde{p}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \tilde{p}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \tilde{p}_{33} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3} \right),$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial x_1} - \tilde{\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial x_2} - \tilde{\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3} - \tilde{\Theta} \end{pmatrix}.$$

- (61) Aus (58) entnehmen wir für den Fall (62) die beiden skalaren Gleichungen

$$L_p \left( \frac{1}{3} \tilde{p}_{33} \right) = L_\Theta(\tilde{\Theta})$$



und

$$L_{II} \left( \frac{2}{3} \tilde{p}_{33} \right) = L_{\Phi} \left( \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3} - \tilde{\Theta} \right).$$

Durch Anwendung des Operators  $3 L_{\Phi}$  auf die erste und des Operators  $3 L_{\Theta}$  auf die zweite dieser Gleichungen und Addition wird  $\tilde{\Theta}$  eliminiert, und man erhält

$$(62) \quad L_1(\tilde{p}_{33}) = L_2 \left( \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3} \right),$$

wobei

$$L_1 = L_p L_{\Phi} + 2 L_{II} L_{\Theta}$$

und

$$L_2 = 3 L_{\Phi} L_{\Theta}$$

ist.

- (63) Für das in (60) gezeichnete Stabstück soll nun die Bewegungsgleichung aufgestellt werden, wobei ein äußerer Bewegungswiderstand proportional zur Geschwindigkeit  $\partial \tilde{y}_3 / \partial t$  angenommen werden soll. Unter Berücksichtigung von

$$\tilde{p}_{33}(x_3 + dx_3) = \tilde{p}_{33}(x_3) + \frac{\partial \tilde{p}_{33}}{\partial x_3} dx_3$$

wird die Bewegungsgleichung

$$\varrho F dx_3 \frac{\partial^2 \tilde{y}_3}{\partial t^2} = -2 \gamma_3 \varrho F dx_3 \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial t} + F \frac{\partial \tilde{p}_{33}}{\partial x_3} dx_3.$$

$\gamma_3$  ist der Koeffizient der äußeren Dämpfung. Nach Einführung des Operators

$$L_{\gamma_3} = 2 \gamma_3 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

erhält die Bewegungsgleichung die Form

$$(64) \quad L_{\gamma_3}(\tilde{y}_3) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \tilde{p}_{33}}{\partial x_3}.$$

- (65) Durch Anwendung der Operation  $(1/\varrho) (\partial/\partial x_3)$  auf (62), der Operation  $L_1$  auf (64) und Addition wird  $\tilde{p}_{33}$  eliminiert, und man erhält die gesuchte Schwingungsdifferentialgleichung

$$L_{\gamma_3} L_1(\tilde{y}_3) - \frac{1}{\varrho} L_2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{y}_3}{\partial x_3^2} \right) = 0.$$

### *Erzwungene harmonische Längsschwingungen*

- (66) Als Beispiel der Anwendung der Schwingungsdifferentialgleichung (65) sei ein Stab von der Länge  $a$  als Schwinger betrachtet. Das Ende  $x_3 = 0$  sei an dem in (7) eingeführten Träger befestigt. Die Kontaktfläche  $F_0$  ist in

diesem Falle der ebene Endquerschnitt des Stabes. Im allgemeinen Falle eines dynamisch nichtsymmetrischen Trägers hat man die Längsschwingungen des Stabes zusammen mit den Biegungs- und den Torsionsschwingungen zu betrachten, da alle diese Schwingungsarten infolge der Gleichungen (9) durch die Randbedingungen für  $x_3 = 0$  miteinander gekoppelt sind. Es soll hier dynamische Symmetrie des Trägers nach (11) vorausgesetzt werden, wodurch die Koppelung wegfällt und sich aus (9) die Gleichung  $\tilde{K}_3 = \Gamma_{33} \tilde{q}_3$  ergibt. Die Endfläche  $x_3 = a$  des Stabes sei frei.

(67) Es seien nun erzwungene Längsschwingungen betrachtet, wobei die Störungen rein harmonisch mit der Frequenz  $(\omega/2\pi)$  seien. Störungen mit allgemeinerem zeitlichem Verlauf können daraus nach FOURIER zusammengesetzt werden. Auf den Endquerschnitt  $x_3 = a$  sollen gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Normalspannungen mit der Resultierenden in  $x_3$ -Richtung  $\tilde{K}_a = K_a e^{j\omega t}$  wirken. Über den Einspannungsquerschnitt  $F_0$  sollen überdies vom Träger her harmonische Störungen auf den Stab übertragen werden (zum Beispiel Einwirkung von Erdbebenwellen auf schlanke Bauwerke oder Bauteile, wie Säulen, Türme, Kamine). Zur Einführung dieser Störungen als Randbedingung denke man sich in (66) zunächst den Stab weggenommen, währenddem  $F_0$  als starre Fläche die Schwingungen des Trägers mitmacht und dabei spannungsfrei bleibt. Der Träger befinde sich in einem als bekannt angenommenen stationären harmonischen Schwingungszustand der Frequenz  $(\omega/2\pi)$ , und  $\tilde{q}_{30} = q_{30} e^{j\omega t}$  sei dabei die  $x_3$ -Komponente der Schwingungen des Schwerpunktes von  $F_0$ .  $q_{30}$  ist eine gegebene komplexe Konstante. Wird nun der Stab nach (66) am Träger befestigt, so überlagern sich dem ursprünglich gegebenen Schwingungszustand des Trägers harmonische, von den Schwingungen des Stabes herührende und von  $F_0$  in den Träger ausstrahlende elastische Wellen der gleichen Frequenz. Die  $x_3$ -Komponente der Schwingungen des Schwerpunktes von  $F_0$  ist nunmehr  $\tilde{q}_{30} + \tilde{q}_3$ .

(68) Die Randbedingungen für  $x_3 = 0$  ergibt sich aus (62), (66) und (67), wobei man  $\tilde{y}_3 = \tilde{q}_{30} + \tilde{q}_3$  zu setzen hat. Man erhält

$$L_2\left(\frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3}\right) = L_1(\tilde{p}_{33}) - \tilde{L}_1\left(\frac{\tilde{K}_3}{F}\right) = \frac{1}{F} L_1(\Gamma_{33} \tilde{q}_3) = \frac{\Gamma_{33}}{F} L_1(\tilde{y}_3 - \tilde{q}_{30})$$

oder

$$L_2\left(\frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3}\right) - \frac{\Gamma_{33}}{F} L_1(\tilde{y}_3) = -\frac{\Gamma_{33}}{F} L_1(\tilde{q}_{30}).$$

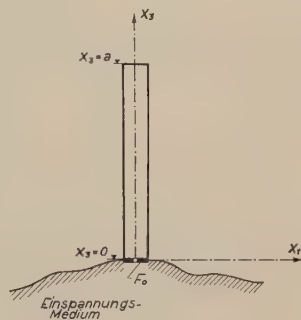


Fig. 6

(69) Für  $x_3 = a$  gilt nach (62) und (67) die Randbedingung

$$L_2 \left( \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{F} L_1(\tilde{K}_a) .$$

(70) Die Einführung des Ansatzes  $\tilde{y}_3(x_3, t) = y_3(x_3) e^{j\omega t}$  in die Differentialgleichung (65) und in die Randbedingungen (68) und (69) ergibt für  $y_3$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y_3}{dx_3^2} - \beta_3^2 y_3 = 0, \quad \text{mit} \quad \beta_3 = \sqrt{\frac{\varrho P_2 P_1}{P_2}}$$

und die Randbedingungen

$$(71) \quad \frac{dy_3}{dx_3} - \frac{\Gamma_{33} P_1}{F P_2} y_3 = - \frac{\Gamma_{33} P_1}{F P_2} q_{30} \quad \text{für} \quad x_3 = 0 ,$$

$$\frac{dy_3}{dx_3} = \frac{P_1}{F P_2} K_a \quad \text{für} \quad x_3 = a .$$

Die auftretenden  $P$ -Größen sind gemäß (54) bekannte Polynome in  $j\omega$ .

(72) Die allgemeine Lösung von (70) hat die Form

$$y_3 = B_{31} e^{\beta_3 x_3} + B_{32} e^{-\beta_3 x_3} .$$

Ihre Einführung in die Randbedingungen (71) gibt für die Konstanten  $B_{31}$  und  $B_{32}$  die Gleichungen

$$\left( \beta_3 - \frac{\Gamma_{33} P_1}{F P_2} \right) B_{31} - \left( \beta_3 + \frac{\Gamma_{33} P_1}{F P_2} \right) B_{32} = - \frac{\Gamma_{33} P_1}{F P_2} q_{30} ,$$

$$\beta_3 e^{\beta_3 a} B_{31} - \beta_3 e^{-\beta_3 a} B_{32} = \frac{P_1}{F P_2} K_a .$$

Mit  $B_{31}$  und  $B_{32}$  sind die erzwungenen Längsschwingungen des Stabes unter Berücksichtigung äußerer, innerer und Abstrahlungsdämpfung, soweit es sich um stationäre Schwingungszustände der Frequenz  $\omega/(2\pi)$  handelt, bestimmt.

## F. Gedämpfte Biegungsschwingungen von Stäben

(73) Wie in (20) sei Symmetrie von  $F_0$  in bezug auf die  $x_1$ - und die  $x_2$ -Achse vorausgesetzt. Um die Gleichung (20) für Biegungsschwingungen in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene durch Einführung von Dämpfungen zu verallgemeinern, muß man, wie dies in (60) am Beispiel der Längsschwingungen gezeigt wurde, bei der Herleitung der Schwingungsdifferentialgleichung das Hookesche Gesetz durch den Ansatz (58) ersetzen und zudem einen äußeren Bewegungswiderstand proportional zur Geschwindigkeit  $(\partial \tilde{y}_1 / \partial t)$  einführen.

- (74) Man erhält zunächst für das Biegemoment  $\tilde{M}_1$  und die Querkraft  $\tilde{Q}_1$  an Stelle von (22):

$$L_1(\tilde{M}_1) = J_2 L_2\left(\frac{\partial^2 \tilde{y}_1}{\partial x_3^2}\right) \quad \text{und} \quad L_1(\tilde{Q}_1) = -J_2 L_2\left(\frac{\partial^3 \tilde{y}_1}{\partial x_3^3}\right).$$

- (75) Für die Differentialgleichung ergibt sich an Stelle von (20):

$$\underline{L_{\gamma_1} L_1(\tilde{y}_1) + \frac{J_2}{F\varrho} L_2\left(\frac{\partial^4 \tilde{y}_1}{\partial x_3^4}\right) = 0}$$

mit der in (62) angegebenen Bedeutung der Operatoren  $L_1$  und  $L_2$ .  $\gamma_1$  ist der Koeffizient der äußeren Dämpfung für Biegungsschwingungen und

$$L_{\gamma_1} = 2\gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

der zugehörige Operator.

- (76) Als Anwendung seien erzwungene Biegungsschwingungen des in (66) als Schwinger eingeführten Stabes betrachtet. Der Träger braucht dabei nicht nach (11) dynamisch-symmetrisch zu sein. Es genügt, anzunehmen, daß von den zwölf Koeffizienten  $\Gamma_{1i}$  und  $\Gamma_{5i}$  wie in (24) nur die vier mit  $i = 1$  und 5 von Null verschieden, die andern acht aber Null seien. Aus den Gleichungen (9) sind in diesem Falle die beiden Gleichungen

$$\tilde{K}_1 = \Gamma_{11} \tilde{q}_1 + \Gamma_{15} \tilde{q}_5 \quad \text{und} \quad \tilde{K}_5 = \Gamma_{51} \tilde{q}_1 + \Gamma_{55} \tilde{q}_5$$

zu entnehmen.

- (77) Am freien Ende  $x_3 = a$  des Stabes soll ein System von harmonischen Kräften mit der Periode  $\omega/(2\pi)$  wirken. Die resultierende Einzelkraft

$$\tilde{K}_{1a} = K_{1a} e^{j\omega t}$$

liege in  $x_1$ -Richtung und das auf den Schwerpunkt der Endfläche bezogene Moment

$$\tilde{K}_{5a} = K_{5a} e^{j\omega t}$$

in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene (das heißt der Momentenpfeil in  $x_2$ -Richtung). Denkt man sich den Stab wie in (67) vom Träger weggenommen, so soll der Träger sich in einem stationären Schwingungszustand der Periode  $\omega/(2\pi)$  befinden, wobei die Kontaktfläche  $F_0$  kleine Translationen in  $x_1$ -Richtung mit dem Ausschlag

$$\tilde{q}_{10} = q_{10} e^{j\omega t}$$

und kleine Rotationen um die  $x_2$ -Achse mit dem Winkel

$$\tilde{q}_{50} = q_{50} e^{j\omega t}$$

ausführen soll.



(78) Setzt man für

$$x_3 = 0, \quad \tilde{y}_1 = \tilde{q}_{10} + \tilde{q}_1, \quad \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x_3} = \tilde{q}_{50} + \tilde{q}_5, \quad \tilde{Q}_1 = \tilde{K}_1, \quad \tilde{M}_1 = \tilde{K}_5,$$

so ergeben sich aus (74) bis (77) die folgenden Randbedingungen:

Für  $x_3 = 0$ :

$$L_1 \left( \Gamma_{11} \tilde{y}_1 + \Gamma_{15} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x_3} \right) + J_2 L_2 \frac{\partial^3 \tilde{y}_1}{\partial x_3^3} = L_1 (\Gamma_{11} \tilde{q}_{10} + \Gamma_{15} \tilde{q}_{50}),$$

$$L_1 \left( \Gamma_{51} \tilde{y}_1 + \Gamma_{55} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial x_3} \right) - J_2 L_2 \frac{\partial^3 \tilde{y}_1}{\partial x_3^3} = L_1 (\Gamma_{51} \tilde{q}_{10} + \Gamma_{55} \tilde{q}_{50}).$$

Für  $x_3 = a$ :

$$J_2 L_2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{y}_1}{\partial x_3^2} \right) = L_1 (\tilde{K}_{5a}), \quad J_2 L_2 \left( \frac{\partial^3 \tilde{y}_1}{\partial x_3^3} \right) = -L_1 (\tilde{K}_{1a}).$$

(79) Die Einführung des Ansatzes

$$\tilde{y}_1(x_3, t) = y_1(x_3) e^{i\omega t}$$

in die Differentialgleichung (75) ergibt für  $y_1$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 y_1}{dx_3^4} + \beta_1^4 y_1 = 0$$

mit

$$\beta_1^4 = \frac{F_0 P_1 P_1}{J_2 P_2}.$$

(80) Die allgemeine Lösung von (79) hat die Form

$$y_1 = B_{11} e^{\beta_1 x_3} + B_{12} e^{i\beta_1 x_3} + B_{13} e^{-\beta_1 x_3} + B_{14} e^{-i\beta_1 x_3}.$$

Durch Einführung dieser Lösung in die Randbedingungen (78) erhält man vier lineare Gleichungen zur Bestimmung der vier Koeffizienten  $B_{11}$  bis  $B_{14}$ .

## G. Gedämpfte Torsionsschwingungen von Stäben

(81) Wie in (25) sei vorausgesetzt, der Stabquerschnitt sei ein Kreisring oder ein Vollkreis. Um die Differentialgleichung (25) für Torsionsschwingungen durch Einführung von Dämpfungen zu verallgemeinern, muß man analog wie in (60) bei der Herleitung der Differentialgleichung das Hookesche Gesetz durch den Ansatz (58) ersetzen und zudem einen äußeren Bewegungswiderstand proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\partial \tilde{q}_3 / \partial t$  einführen.

(82) Man erhält zunächst für das Torsionsmoment  $\tilde{M}_3$  an Stelle von (26) die Gleichung

$$L_{II}(\tilde{M}_3) = \frac{J}{2} L_{\Phi} \left( \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial x_3} \right).$$

(83) Als Differentialgleichung ergibt sich

$$\underline{L_{\gamma_6} L_{II}(\tilde{\varphi}_3) - \frac{1}{2\rho} L_{\Phi} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_3}{\partial x_3^2} \right) = 0.}$$

$\gamma_6$  ist der Koeffizient der äußeren Dämpfung für Torsionsschwingungen und

$$L_{\gamma_6} = 2\gamma_6 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

der zugehörige Operator. Die Differentialgleichung stimmt formal mit der Gleichung (65) für Längsschwingungen überein, so daß die erzwungenen harmonischen Torsionsschwingungen analog wie die Längsschwingungen [nach (66) bis (72)] zu finden sind.

## H. Zur experimentellen Bestimmung von Elastizitätszahlen, dynamischen Federungsgrößen und Dämpfungskoeffizienten bei schwacher Dämpfung

### *Die Resonanzfunktion*

(84) Für die in Abschnitt E behandelten erzwungenen Längsschwingungen eines Stabes sei nun schwache Dämpfung und wie in (67) eine harmonische Störkraft

$$\tilde{K}_a = K_a e^{i\omega t} \neq 0,$$

am Stabende  $x_3 = a$  vorausgesetzt, währenddem vom Träger her keine Störung einwirke, das heißt  $q_{30} = 0$  sei.

Die erzwungene Schwingung sei an Hand der Resonanzfunktion

$$\Omega = \left| \frac{\gamma_3(a)}{\Lambda_a} \right|^2$$

in Abhängigkeit der zu  $\omega$  proportionalen Größe  $\nu = a\omega/c$  betrachtet, wobei  $c = \sqrt{E/\rho}$  ist wie in (15).

(85) Die dynamische Federungsgröße  $\Gamma_{33}$  bestimmt in Abschnitt E die Abstrahlungsdämpfung. Sie sei in der Form

$$\Gamma_{33} = \frac{FE}{a} \Gamma_3 (1 + j\delta_0 \nu)$$

angesetzt, wo  $\Gamma_3$  und  $\delta_0$  reelle Konstanten sind. Die äußere Dämpfung ist durch den in (63) eingeführten Koeffizienten  $\gamma_3$  bestimmt. Für die innere Dämpfung sei der Ansatz von JEFFREYS [siehe (59)] gewählt, in dem eine Maxwell'sche Dämpfung mit dem Koeffizienten  $\eta$  und eine Voigt'sche mit

dem Koeffizienten  $\eta'$  kombiniert sind.

$$\delta_0, \delta_1 = \frac{3 k a}{2 c (\mu + 3 k)} \eta, \quad \delta_2 = \frac{3 k c}{2 a \mu (\mu + 3 k)} \eta' \quad \text{und} \quad \delta_3 = \frac{a \gamma_3}{c}$$

sind als hinreichend kleine Größen vorausgesetzt.

- (86) Zur Berechnung von  $\Omega$  ist  $\gamma_3(a)$  nach (72) zu bestimmen. Entwickelt man die vorkommenden Ausdrücke nach Potenzen der  $\delta_i$  und berücksichtigt nur kleine Größen von minimaler Ordnung, so erhält man

$$\Omega = \left( \frac{a}{FE} \right)^2 \frac{\nu^2 Z_0 + Z_1}{\nu^2 (\nu^2 N_0 + N_1)},$$

$$Z_0 = \nu^2 + I_3^2 + (\nu^2 - I_3^2) \cos 2\nu + 2 I_3 \nu \sin 2\nu,$$

$$N_0 = \nu^2 + I_3^2 - (\nu^2 - I_3^2) \cos 2\nu - 2 I_3 \nu \sin 2\nu,$$

$$Z_1 = \varepsilon_1^2 Z_0 + I_3^2 \varepsilon_2^2 (1 - \cos 2\nu) - 4 I_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \nu^2 + 2 (\nu^2 + I_3^2) \varepsilon_3^2 \nu^2,$$

$$N_1 = I_3^2 \varepsilon_2^2 (1 + \cos 2\nu) - 4 I_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \nu^2 + 2 (\nu^2 + I_3^2) \varepsilon_3^2 \nu^2,$$

$$\varepsilon_1 = \delta_1 - \delta_3 + \delta_2 \nu^2,$$

$$\varepsilon_2 = \delta_1 - \delta_2 + (\delta_2 - \delta_0) \nu^2,$$

$$\varepsilon_3 = \delta_1 + \delta_3 + \delta_2 \nu^2.$$

#### *Bestimmung von Elastizitätszahlen und Dämpfungskoeffizienten durch Schwingungsversuche*

- (87) Bei kleinen Dämpfungen ist für die Aufsuchung der Resonanzfrequenzen  $N_1$  gegenüber  $N_0$  in  $\Omega$  zu vernachlässigen. Die Frequenzgleichung lautet somit  $N_0 = 0$ . Denkt man sich zunächst den Stab losgelöst vom Träger, also mit freien Enden  $x_3 = 0$  und  $x_3 = a$ , in Schwingungen versetzt, so ist in der Frequenzgleichung  $I_3 = 0$  zu setzen. Sie lautet dann  $1 - \cos 2\nu = 0$ . Ihre positiven Lösungen sind  $\nu = r_{0n} = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Beobachtet werden die Resonanzfrequenzen  $\omega/(2\pi) = \omega_{0n}/(2\pi)$ . Kennt man die Nummer  $n$  einer beobachteten Resonanzfrequenz, so liefert die nach (84) bestehende Gleichung

$$n\pi = a \omega_{0n} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

den Wert von  $F$ .

(Die analoge Methode, angewandt auf Torsionsschwingungen eines beidseitig freien Stabes von Kreisring- oder Vollkreisquerschnitt, liefert den

Wert von  $\mu$  und damit auch den Wert

$$k = \frac{E \mu}{3(3\mu - E)}$$

des Kompressionsmoduls.)

- (88) Für  $\Gamma_3 \neq 0$ , das heißt, wenn der Stab gemäß Figur 6 am Träger befestigt ist, sei die Frequenzgleichung  $N_0 = 0$  nach  $\Gamma_3$  aufgelöst. Dies ergibt

$$\Gamma_3 = \frac{\nu \sin 2\nu}{1 + \cos 2\nu}.$$

Ihre positiven Lösungen seien, nach wachsender Größe geordnet,  $\nu_1, \nu_2, \dots$ .  $\Gamma_3$  sei positiv. Es folgt daraus

$$(n-1)\pi < \nu_n < (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

- (89) Wird bei einem Schwingungsversuch eine Resonanzfrequenz  $\omega_n/(2\pi)$  beobachtet, so ist, wenn  $E$  nach (87) bestimmt ist,  $\nu_n = a\omega_n\sqrt{\rho/E}$  bekannt und damit nach (88) auch  $\Gamma_3$ .

- (90) Die Funktion  $N_0(\nu)$  werde in der Umgebung einer Nullstelle  $\nu_n$  in eine Potenzreihe entwickelt, wobei  $\nu = \nu_n + \xi$  gesetzt sei.

$$N_0(\nu) = N_0(\nu_n) + N'_0(\nu_n)\xi + \frac{1}{2}N''_0(\nu_n)\xi^2 + \dots$$

Man kann leicht nachweisen, daß

$$N'_0(\nu_n) = 0, \quad N''_0(\nu_n) > 0,$$

so daß man die in der Umgebung von  $\nu_n$  gültige Näherungsgleichung

$$N_0(\nu) = \frac{1}{2}N''_0(\nu_n)\xi^2$$

erhält.

- (91) Setzt man

$$N(\nu_n) = \frac{\nu_n^2}{2}N''_0(\nu_n)$$

und

$$N_2(\nu_n) = \frac{N_1(\nu_n)}{N(\nu_n)},$$

so kann nach (86) für kleine  $|\xi|$  angenähert

$$\Omega(\nu_n + \xi) = \left(\frac{a}{FE}\right)^2 \frac{Z_0(\nu_n)}{N(\nu_n)[\xi^2 + N_2(\nu_n)]}$$

geschrieben werden. Die graphische Darstellung dieser Funktion ergibt den «Resonanzbuckel» bei  $\nu_n$ , dessen Kenntnis man sich durch Schwingungsversuche verschaffen kann. Das Maximum liegt bei  $\xi = 0$ . Da  $Z_0(\nu_n)$  und



$N(\nu_n)$  als bekannt anzusehen sind, liefert das Maximum den Wert von  $N_2(\nu_n)$ . Die beiden Werte von  $\xi$ , nämlich  $\xi = \pm \sqrt{H} N_2(\nu_n)$ , für welche  $\Omega$  die Hälfte des Maximums ist, begrenzen auf der  $\nu$ -Achse ein Intervall  $H + 2\sqrt{H} N_2(\nu_n)$ , das man Halbwertbreite nennt und dessen Kenntnis ebenfalls  $N_2(\nu_n)$  liefert.

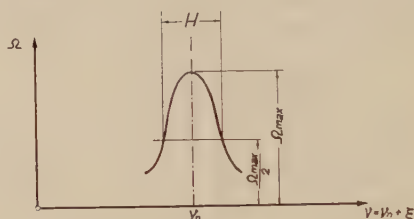


Fig. 7

- (92) Nachdem gemäß (87) und (89)  $E$ ,  $\mu$ ,  $k$  und  $\Gamma_3$  als bekannt vorausgesetzt werden können, ist es auch möglich, die Dämpfungskoeffizienten zu bestimmen. Nach (91) sei  $N_1(\nu_n)$  für mehrere Resonanzwerte  $\nu_n$  als bekannt angenommen. Mit freien Längsschwingungen (das heißt, der Stab ist losgelöst vom Träger) kann nach (86) aus  $N_1(\nu_n)$  die Größe  $\varepsilon_3$  bestimmt werden. Führt man diese Bestimmung für mindestens zwei Resonanzwerte  $\nu_n$  durch, so erhält man wegen  $\varepsilon_3 = \delta_1 + \delta_3 + \delta_2 \nu^2$  die beiden Größen  $\delta_1 + \delta_3$  und  $\delta_2$ , das heißt in Rücksicht auf (85) den Wert für  $\eta'$  und eine lineare Kombination von  $\eta$  und  $\gamma_3$ . Entsprechende Beobachtungen mit  $\Gamma_3 \neq 0$ , das heißt mit eingespanntem Stab, führen dann zur Bestimmung von  $\varepsilon_2$  für mindestens zwei Werte von  $\nu$ , und damit zur Kenntnis von  $\delta_1 = \delta_2$  und  $\delta_2 = \delta_0$ .  $\delta_1$ ,  $\delta_3$  und  $\delta_0$  sind dadurch einzeln bestimmbar, womit auch  $\eta$  und  $\gamma_3$  bekannt sind. Die äußere Dämpfung  $\gamma_3$  nach dem Ansatz (63), die innere Dämpfung mit den Koeffizienten  $\eta$  und  $\eta'$  nach (59) (JEFFREYS) und die Abstrahlungsdämpfung  $\delta_0$  nach (85) sind damit erfaßt.

### Summary

This paper deals with a bar (called "oscillator"), clamped in a finite or infinite body (called "support") and excited to vibrations. The loss of kinetic energy of the oscillator has been divided into three kinds, i.e.—

- "inner damping" described by a suitable generalization of Hooke's law,
- "outer damping", due to frictional forces acting at the free surface of the oscillator, and
- "damping by radiation" caused by the elastic waves, radiating from the surface of contact between the oscillator and the support and travelling through the latter.

As examples of supports, a semi-infinite bar and the infinite-elastic space have been treated. As examples of vibrations, forced harmonic longitudinal, transverse and torsional vibrations of the bar have been considered.

(Eingegangen: 19. 1. 1951.)

# Charakteristikenverfahren zur näherungsweise Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung um ringförmige Körper

VON WOLFGANG HAACK, Berlin<sup>1)</sup>

Die Strömung eines idealen Gases um einen schlanken Rotationskörper, der mit Überschallgeschwindigkeit schräg angeblasen wird, kann man näherungsweise durch Linearisierung der Differentialgleichung der Gasdynamik ermitteln. Dabei verwendet man im allgemeinen Quellsenken- und Dipolverteilungen längs der Rotationsachse, die nach dem von VON KÁRMÁN und MOORE (1932) und VON KÁRMÁN und TSIEN (1939) angegebenen Verfahren berechnet werden<sup>2)</sup>.

Bei einem zusammengesetzten Rotationskörper, der etwa dadurch entsteht, daß man über einen spitzen rotationssymmetrischen Kern einen Ring von beliebigem, aber vorn scharfkantigem Profil schiebt (Figur 1), wird das Verfahren der Quell- und Dipolverteilung recht umständlich. Dabei bereiten die Unstetigkeitsflächen, die durch die Vorderkante des Ringes entstehen, besondere Schwierigkeiten. Hier zeigt sich, daß man solche Strömungsvorgänge sehr einfach mit einem zu der linearen Differentialgleichung gehörenden Charakteristikenverfahren ermitteln kann. Auch die Unstetigkeitsflächen bereiten keine Umstände. Selbst die mehrfache Reflexion der Unstetigkeitsflächen an den Wänden zwischen Ring und Kern läßt sich ohne besonderen Aufwand überwinden.

Die praktische Bedeutung der Problemstellung liegt in der Möglichkeit, Rotationskörper durch Ringe, die über das Heck geschoben werden, zu stabilisieren. An drei Beispielen wird gezeigt, daß der Auftrieb ein und desselben Ringes sehr verschieden sein kann, je nach der Gestalt des Kernes und nach der Art der Anbringung.

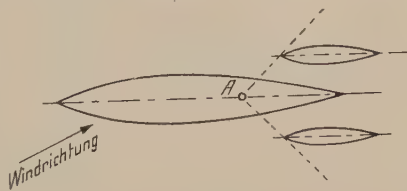


Fig. 1

Rotationskörper mit ringförmigem Leitwerk. Die Strömung berechnet man bis Punkt A nach dem Quell-Dipol-Verfahren, hinter Punkt A nach dem Charakteristikenverfahren.

<sup>1)</sup> Ordentlicher Professor an der Technischen Universität und Honorarprofessor an der Freien Universität Berlin.

<sup>2)</sup> Vgl. etwa: R. SAUER, *Theoretische Einführung in die Gasdynamik* (Springer, Berlin 1943). – R. COURANT und K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, New York 1948). – A. FERRI, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows* (Macmillan, New York 1949).

Im ersten Teil der folgenden Mitteilung wird das Charakteristikenverfahren entwickelt. Gemäß der Theorie, die kürzlich vom Verfasser und G. HELLWIG<sup>1)</sup> veröffentlicht wurde, würde es naheliegen, an Stelle der Potentialfunktion die sogenannten Normalfunktionen einzuführen und diese nach dem Charakteristikenverfahren zu bestimmen. Dieser Vorgang wird sehr einfach im Innern des Strömungsgebietes, bereitet aber etwas Mühe längs der Ränder. Deshalb wurde hier das Verfahren abgeändert, so daß unmittelbar die Potentialfunktion bestimmt wird. Das bedeutet eine Vereinfachung am Rand, verlangt aber eine Integration mehr als die Bestimmung der Normalfunktion.

Das Verfahren ist im folgenden so dargestellt, daß es unabhängig von jener Arbeit verständlich ist.

Im zweiten Teil werden drei Beispiele behandelt:

1. ein frei stehender zylindrischer Ring,
2. der gleiche Ring über einem zylindrischen Kern,
3. der gleiche Ring über konischem Kern.

Die beiden ersten Beispiele sollen hauptsächlich die Ermittlung der Unstetigkeiten erläutern.

## ERSTER TEIL: CHARAKTERISTIKENVERFAHREN

### 1. Die linearen Differentialgleichungen

Das Geschwindigkeitspotential für die Strömung eines idealen Gases sei  $\Phi(x, y, z)$ . Die partiellen Ableitungen  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $w$  mit dem Betrag  $w$ . Es ist also

$$w^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2. \quad (1, 1)$$

Bezeichnen wir mit  $\kappa$  die Gaskonstante und mit  $a$  die Schallgeschwindigkeit, so gilt bekanntlich

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} w^2. \quad (1, 2)$$

Die Differentialgleichung für die Potentialströmung eines idealen Gases ist

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} + \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2}\right) \Phi_{zz} - \frac{2 \Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} - \frac{2 \Phi_x \Phi_z}{a^2} \Phi_{xz} - \frac{2 \Phi_y \Phi_z}{a^2} \Phi_{yz} = 0.$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die Strömung um einen schlanken Rotationskörper, der sich in einer Parallelströmung der Geschwindigkeit  $U$  befindet, und setzen voraus, daß die Richtung der Anströmgeschwindigkeit

<sup>1)</sup> W. HAACK und G. HELLWIG, Math. Z. 53, 244–266; 340–355 (1950).

nur einen *kleinen* Winkel  $\vartheta$  mit der Achse des Rotationskörpers bildet. Die  $x$ -Achse möge mit der Achse des Rotationskörpers zusammenfallen, die  $y$ -Achse legen wir so, daß der Vektor der Anströmgeschwindigkeit zur  $(x, y)$ -Ebene parallel ist.

Dann können wir die Strömung um den Rotationskörper als kleine Störung der Parallelströmung ansehen. Das Potential der ungestörten Parallelströmung ist

$$U \cos \vartheta \, x + U \sin \vartheta \, y . \tag{1, 3}$$

Da  $\vartheta$  als klein vorausgesetzt ist, können wir dafür schreiben, wegen  $\cos \vartheta \approx 1$ ,

$$U \, x + U \sin \vartheta \, y , \tag{1, 3a}$$

dabei ist  $U \sin \vartheta$  klein gegen  $U$ . Jetzt machen wir für  $\Phi(x, y, z)$  den Ansatz

$$\Phi(x, y, z) = U \, x + \bar{\Phi}(x, y, z) , \tag{1, 4}$$

indem wir den unsymmetrischen Teil der Parallelströmung mit in das Störpotential  $\bar{\Phi}$  aufnehmen. Gemäß unserer Voraussetzung sind  $\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z$  klein gegen  $U$ , und wir gelangen durch Vernachlässigung kleiner Größen zu der linearen Differentialgleichung für  $\bar{\Phi}$ :

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} + \bar{\Phi}_{zz} = 0 , \tag{1, 5}$$

in der die Schallgeschwindigkeit  $a = a_0$  konstant ist. Durch Übergang zu Zylinderkoordinaten

$$x = x; \quad y = r \cos \psi; \quad z = r \sin \psi \tag{1, 6}$$

erhält man die Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right) \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{rr} + \frac{1}{r^2} \bar{\Phi}_{\psi\psi} + \frac{1}{r} \bar{\Phi}_r = 0 . \tag{1, 7}$$

Da die Gleichung linear ist, können wir das Potential  $\bar{\Phi}$  als Überlagerung zweier Teilpotentiale darstellen. Wir zerlegen  $\bar{\Phi}$  in einen axialsymmetrischen Teil  $\varphi$  und einen unsymmetrischen Teil  $\bar{\varphi}$ . Für den unsymmetrischen Teil  $\bar{\varphi}$  versuchen wir den Ansatz

$$\bar{\varphi} = F(x, r) \cos \psi .$$

Dann wird also

$$\bar{\Phi}(x, r, \psi) = \varphi(x, r) + F(x, r) \cos \psi . \tag{1, 8}$$

Durch Einsetzen in (1, 7) erhält man mit der Abkürzung  $U/a = M$  für den axialsymmetrischen Teil die Differentialgleichung

$$(1 - M^2) \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r = 0 \tag{1, 9}$$



und für den unsymmetrischen Teil

$$(1 - M^2) F_{xx} + F_{rr} + \frac{1}{r} F_r - \frac{1}{r^2} F = 0. \quad (1, 10)$$

## 2. Charakteristikenverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems

Um die beiden Differentialgleichungen (1, 9) und (1, 10) gemeinsam behandeln zu können, schreiben wir (1, 10) in der Form:

$$(1 - M^2) F_{xx} + F_{rr} + \frac{1}{r} F_r - \frac{\varepsilon}{r^2} F = 0. \quad (2, 1)$$

Für  $\varepsilon = 0$  erhalten wir (1, 9) und für  $\varepsilon = 1$  die Gleichung (1, 10). Wenn  $M > 1$ , also  $U$  größer als die Schallgeschwindigkeit ist, gehört (2, 1) zum hyperbolischen Typus und besitzt reelle Charakteristiken, die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(M^2 - 1) dr^2 - dx^2 = 0 \quad (2, 2)$$

genügen. Führen wir längs der Charakteristiken die Bogenlänge  $ds^2 = M^2 dr^2$  als Parameter ein, so wird

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{M} \sqrt{M^2 - 1}; \quad r' = \frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{M}. \quad (2, 3)$$

Die Charakteristiken sind bekanntlich zwei Scharen von Geraden, die mit der  $x$ -Achse den Machschen Winkel  $\alpha$  einschließen mit  $\sin \alpha = 1/M$ .

Eine beliebige Funktion  $F(x, r)$  hat längs einer Charakteristik die Richtungsableitung

$$\frac{dF}{ds} = F_x x' + F_r r' = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} F_x \pm \frac{1}{M} F_r.$$

Wir bezeichnen die Richtungsableitung längs der nach außen führenden Charakteristik ( $r' = +1/M$ ) mit  $F_1$  und diejenige längs der anderen mit  $F_2$ , dann gilt:

$$F_1 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} F_x + \frac{1}{M} F_r; \quad F_2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} F_x - \frac{1}{M} F_r. \quad (2, 4)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach  $F_x, F_r$  gibt

$$F_r = \frac{M}{2} (F_1 - F_2); \quad F_x = \frac{M}{2\sqrt{M^2 - 1}} (F_1 + F_2). \quad (2, 5)$$

Nach (2, 4) sind  $F_1$  und  $F_2$  Funktionen von  $x, r$ . Ihre Richtungsableitungen werden durch zwei Indizes bezeichnet. Nennen wir  $s_1$  die Bogenlänge der ersten

Charakteristik ( $r' = +1/M$ ) und  $s_2$  die der zweiten, so gelten die Bezeichnungen:

$$F_{12} = \frac{dF_1}{ds_2}, \quad F_{21} = \frac{dF_2}{ds_1}.$$

Aus (2, 3) und (2, 4) folgt:

$$F_{12} = (F_1)_x \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} - (F_1)_r \frac{1}{M}$$

und nach einfacher Umrechnung

$$-F_{12} = \frac{1}{M^2} [(1 - M^2) F_{xx} + F_{rr}] = -F_{21}.$$

Jetzt können wir in der Differentialgleichung (2, 1) an Stelle der partiellen Ableitungen die Richtungsableitungen setzen und erhalten:

$$-M^2 F_{12} + \frac{M}{2r} (F_1 - F_2) - \frac{\varepsilon}{r^2} F = 0. \quad (2, 6)$$

Schreiben wir diese Gleichung in Differenzenform, so erhalten wir die Grundgleichungen für das Charakteristikenverfahren

$$\Delta F_1 = \left( \frac{F_1 - F_2}{2rM} - \frac{\varepsilon}{r^2 M^2} F \right) \Delta s_2. \quad (2, 7)$$

$$\Delta F_2 = \left( \frac{F_1 - F_2}{2rM} - \frac{\varepsilon}{r^2 M^2} F \right) \Delta s_1. \quad (2, 8)$$

Zur Lösung des *Anfangswertproblems* gehen wir nun folgendermaßen vor: Längs einer Kurve  $l$  (Figur 2), die nirgends von einer Charakteristik berührt wird, sei die Strömung bekannt, das heißt längs  $l$  kennt man  $F$ ,  $F_x$ ,  $F_r$  und daher nach (2, 4) auch  $F_1$ ,  $F_2$ . Wir wählen auf  $l$  zwei Punkte  $P$ ,  $Q$  in geeignetem Abstand. Die entsprechenden Charakteristiken durch  $P$  und  $Q$  schneiden sich in  $R$ . Der Abstand  $QR = \Delta s_2$  und  $PR = \Delta s_1$  gibt die zu jeder Charakteristik gehörige Längendifferenz. Dann ist

$$F_1(R) = F_1(Q) + \Delta F_1, \quad F_2(R) = F_2(P) + \Delta F_2. \quad (2, 9)$$

$\Delta F_1$  und  $\Delta F_2$  erhält man aus (2, 7) und (2, 8). Wenn  $\varepsilon \neq 0$  ist, muß man noch  $F(R)$  bestimmen. Das geschieht durch näherungsweise Integration nach der Trapezformel. Da man in  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  die Ableitungen von  $F$  kennt, kann man die Integration längs der ersten Charakteristik über

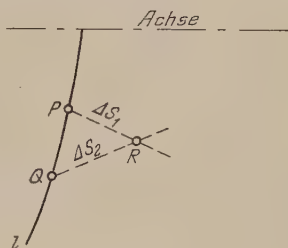


Fig. 2

Skizze zur Lösung des Anfangswertproblems.

$F_1$  oder längs der zweiten über  $F_2$  ausführen. Am besten ist, beides zu tun. Längs der ersten Charakteristik wird

$$F^I(R) = F(P) + \frac{1}{2} [F_1(P) + F_1(R)] \Delta s_1, \quad (2, 10)$$

längs der zweiten folgt

$$F^{II}(R) = F(Q) + \frac{1}{2} [F_2(Q) + F_2(R)] \Delta s_2. \quad (2, 11)$$

Da das Differenzenverfahren nur angenäherte Werte liefert, wird im allgemeinen  $F^I \neq F^{II}$  sein. Die Differenz  $|F^I - F^{II}|$  gibt ein Maß für die Genauigkeit. Wird sie zu groß, so muß man die Intervalle, das heißt den Abstand  $PQ$ , kleiner wählen. Für die Fortsetzung der Rechnung setzen wir

$$F(R) = \frac{1}{2} [F^I(R) + F^{II}(R)]. \quad (2, 12)$$

Damit ist das Anfangswertproblem gelöst. Wir wollen erwähnen, daß für  $\varepsilon = 0$ , also für den symmetrischen Teil  $\varphi$  der Strömung, die Gleichungen (2, 10) bis (2, 12) überflüssig werden.

### 3. Das charakteristische Randwertproblem

Für die Strömung um einen Rotationskörper liegt zunächst kein Cauchy-sches Problem vor, sondern ein charakteristisches Anfangswertproblem, bei dem längs eines Randes, nämlich an der Wand des Körpers, die Richtung des Geschwindigkeitsvektors bekannt ist. Wir nehmen an, die Strömung sei in  $A$  und links vom Punkt  $A$  der Wand des Drehkörpers bekannt (Figur 3). Dann kennt man die Funktionen  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  auch längs der Charakteristik I durch  $A$ . Es seien  $B$ ,  $C$ , ... Punkte der Charakteristik I durch  $A$ . Wir legen durch  $B$  die Charakteristik II, bestimmen ihren Schnittpunkt  $L$  mit der Wand und die Länge  $BL = \Delta s_2$ . Dann folgt aus (2, 7):

$$F_1(L) = F_1(B) + \Delta F_1. \quad (3, 1)$$

Zur Bestimmung von  $F_2$  beachten wir die Randbedingung. Die Tangente der Randkurve  $dr/dx$  ist gegeben. Demnach gilt:

$$\frac{F_r}{F_x} = \frac{dr}{dx} \quad (3, 2)$$



Fig. 3

Skizze zum charakteristischen  
Randwertproblem.

und wegen (2, 5)

$$\frac{dr}{dx} = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (3, 3)$$

Daraus folgt für  $F_2(L)$

$$F_2(L) = F_1(L) \frac{\sqrt{M^2 - 1} - (dr/dx)}{\sqrt{M^2 - 1} + (dr/dx)}. \quad (3, 4)$$

Schließlich bestimmt man im Falle  $\varepsilon \neq 0$  noch  $F(L)$  durch

$$F(L) = F(B) + \frac{1}{2} [F_2(B) + F_2(L)] \Delta s_2. \quad (3, 5)$$

Zur Berechnung des Widerstandes bzw. des Auftriebes braucht man längs des Randes noch die Funktion  $F_x(L)$ , die nach (2, 5) bekannt ist.

Kennt man  $F, F_1, F_2$  in  $L$ , so hat man für alle Punkte der Charakteristik I durch  $L$  stets Cauchysche Anfangswertprobleme, die nach Ziffer 2 erledigt sind.

Damit ist das Charakteristikenverfahren soweit entwickelt, daß man für jeden (schlanken) Rotationskörper den unsymmetrischen Potentialteil  $F(x, r)$  mit  $F_x, F_r$  berechnen kann. Für den symmetrischen Teil  $\varphi(x, r)$  gelten dieselben Gleichungen mit  $\varepsilon = 0$ , jedoch tritt an Stelle der Randbedingung (3, 2) wegen (1, 4) und (1, 8) die Forderung

$$\frac{\varphi_r}{U + \varphi_x} = \frac{dr}{dx}$$

und wegen (2, 5) die Bindung zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  längs des Randes

$$\frac{dr}{dx} = \frac{M(\varphi_1 - \varphi_2)}{2U + (M/\sqrt{M^2 - 1})(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (3, 6)$$

Die Durchführung des Verfahrens gestaltet sich besonders einfach, wenn man das Netz der Charakteristiken so wählt, daß man, soweit möglich, konstante Intervalle  $\Delta s_1$  und  $\Delta s_2$  hat.

Wir schließen diesen Abschnitt mit folgender Bemerkung: Nach (3, 5) wird  $F(L)$  im Randpunkt  $L$  so bestimmt, daß eine Charakteristik bevorzugt ist. Man kann aber  $F(L)$  nochmals durch Integration längs der Randkurve von  $A$  bis  $L$  (Figur 3) berechnen und durch Mittelbildung mit (3, 5) einerseits den Wert verbessern, andererseits die Güte des Verfahrens beurteilen.

#### 4. Überdruck, Widerstand und Auftrieb

Zur Bestimmung des Überdruckes, der an einer Stelle  $x, r, \psi$  herrscht, gehen wir aus von der Bernoullischen Druckformel

$$\frac{p}{p_0} = \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left( \frac{w^2 - w_0^2}{a_0^2} \right) \right]^{\kappa/(\kappa - 1)}.$$



Ist nun, wie hier vorausgesetzt,  $w^2 - w_0^2$  klein, so gilt für den Überdruck die Näherungsformel:

$$\frac{p - p_0}{\rho_0 w_0^2/2} = \frac{w^2}{w_0^2} - 1.$$

In unserem Falle ist nach (1, 4)  $w_0 = U$  und

$$w^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 \approx (U + \varphi_x + F_x \cos \psi)^2$$

oder, wenn man konsequent Größen zweiter Ordnung vernachlässigt,

$$w^2 = U^2 + 2U\varphi_x + 2UF_x \cos \psi.$$

Damit wird der Überdruck

$$\frac{p - p_0}{\rho U^2/2} = \frac{2\varphi_x}{U} + \frac{2}{U} F_x \cos \psi. \quad (4, 1)$$

Zur Bestimmung der Kräfte, die von der Strömung auf den Körper übertragen werden, braucht man die Funktionen  $\varphi_x$  und  $F_x$  an der Oberfläche. Der Meridian des Rotationskörpers sei gegeben durch  $r(x)$  und seine Tangente durch  $r' = dr/dx$ . Bezeichnen wir mit  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  die Einheitsvektoren in Richtung der  $y$ -,  $z$ -,  $x$ -Achse, so wird die auf ein Flächenelement wirkende Kraft, bezogen auf den Staudruck,

$$d^2\mathfrak{B} = \frac{p - p_0}{\rho U^2/2} (-\cos \psi \mathbf{i} - \sin \psi \mathbf{j} + r' \mathbf{k}) r dx d\psi.$$

Durch Integration über  $\psi$  von 0 bis  $2\pi$  erhalten wir die Kraft, die auf eine Scheibe des Körpers der Dicke  $dx$  ausgeübt wird; dividieren wir durch  $dx$ , so ist  $d\mathfrak{B}/dx$  die Kraft pro Längeneinheit des Körpers. Die  $\mathbf{k}$ -Komponente gibt den *Widerstand*, die  $\mathbf{i}$ -Komponente den *Auftrieb*. Es folgt für den *Widerstand*:

$$\frac{dR}{dx} = 2\pi r r' \frac{2\varphi_x}{U} \quad (4, 2)$$

und für den *Auftrieb*

$$\frac{d\bar{W}}{dx} = \frac{2}{U} F_x \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \frac{2r}{U} F_x \pi. \quad (4, 3)$$

Im allgemeinen bezieht man beide Werte auf einen geeigneten Querschnitt (zum Beispiel größten Querschnitt) und erhält den Widerstands- und Auftriebsbeiwert, indem man  $\bar{W}$  noch nach dem Anstellwinkel  $\vartheta$  differenziert. Die Funktion

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{d\bar{W}}{dx} = \frac{2r\pi}{U \sin \vartheta} F_x, \quad (4, 4)$$

als Funktion von  $x$  betrachtet, nennen wir die Auftriebsverteilung des Körpers. Sie ist maßgebend für alle Stabilisierungsprobleme.

## ZWEITER TEIL: UNSTETIGKEITEN

Im folgenden sollen einige einfache Anwendungen der Theorie behandelt werden. Die Druck- und Auftriebsverteilung über einem einfachen Rotationskörper wird man wohl besser und schneller nach dem Quellsenken- bzw. Dipolverfahren berechnen<sup>1)</sup>. Das Charakteristikenverfahren dürfte sich besonders bei ringförmigen Körpern oder bei einfachen Rotationskörpern eignen, die zur Stabilisierung mit einem oder mehreren Ringen beliebiger Form versehen sind. Wir wollen drei verschiedene Anordnungen von Ringen behandeln und die Unstetigkeit untersuchen, die durch die Vorderkante des Ringes entsteht.

## 5. Auftriebsverteilung eines zylindrischen Ringes

Figur 4 zeigt einen Meridianschnitt in der  $(x, y)$ -Ebene durch den zylindrischen Ring, der unter dem Winkel  $\vartheta$  mit der Geschwindigkeit  $U$  angeblasen wird. In Figur 5 haben wir den unteren Teil des Schnittes vergrößert gezeichnet und ein Netz von Charakteristiken für die Machsche Zahl  $M = 1,5$  darauf gelegt.

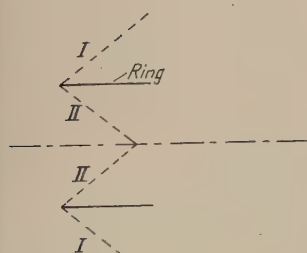


Fig. 4

Zylindrischer Ring mit den Unstetigkeitsflächen.

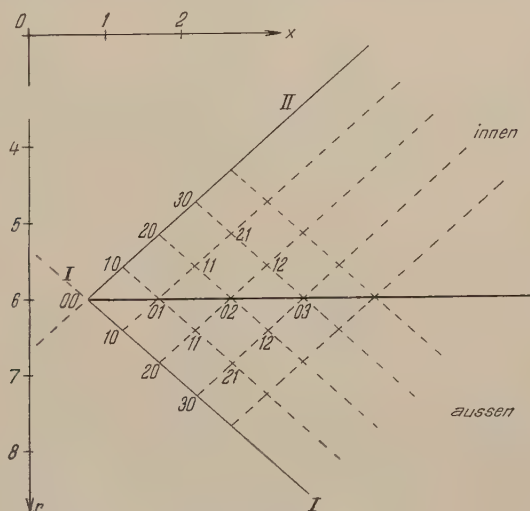


Fig. 5

Charakteristikenchema für freien Ring.

Die Gitterpunkte des Netzes haben wir so nummeriert, wie es zur Durchführung des Verfahrens vorteilhaft ist. Durch den vordersten Ringpunkt (00) geht

<sup>1)</sup> Vgl. etwa: R. SAUER, *Theoretische Einführung in die Gasdynamik* (Springer, Berlin 1943). – R. COURANT und K. O. FRIEDRICH, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publishers, New York 1948). – A. FERRI, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows* (Macmillan, New York 1949).

die Machsche Linie I nach außen und II nach innen, dabei gehört nach der Bezeichnung von Ziffer 3 die Linie I zur ersten und II zur zweiten Schar. In dem Gebiet links von I und II ist die Strömung ungestört. Das Potential  $F$  ist in diesem Gebiet gegeben durch [vgl. (1, 8)]

$$\cos \varphi F(x, y, z) = (U \sin \vartheta) y \quad \text{oder} \quad \cos \varphi F(x, r) = (U \sin \vartheta) r \cos \varphi.$$

Daher wird

$$F(x, r) = U \sin \vartheta r; \quad F_x = 0; \quad F_r = U \sin \vartheta. \quad (5, 1)$$

Aus (2, 4) folgt daraus mit  $M = 1,5$

$$F_1 = +0,667 U \sin \vartheta; \quad F_2 = -0,667 U \sin \vartheta. \quad (5, 2)$$

Beim Auftreffen der Strömung auf die Ringkante bei (00) tritt eine Unstetigkeit auf, die sich längs der Charakteristik I nach außen und längs II nach innen fortpflanzt. Zunächst muß an der Ringwand die Randbedingung (3, 3) erfüllt sein. Da in unserem Beispiel  $r' = 0$  ist, folgt:

$$F_1 = F_2 \quad (\text{am Rand}). \quad (5, 3)$$

Diese Beziehung gilt rechts von (00). Auf der Machschen Linie I, die sich von links dem Punkt (00) nähert, ist die Änderung von  $F_2$  nach (2, 8) bestimmt. Sie erfährt keine Störung durch den Ring. An der Innenseite bei (00) gilt daher

$$F_2 = F_1 = -0,667 U \sin \vartheta \quad [\text{innen bei (00)}]. \quad (5, 4)$$

Entsprechend bleibt  $F_1$  auf der Machschen Linie II, die von links nach (00) führt, ungestört, man hat also

$$F_1 = F_2 = +0,667 U \sin \vartheta \quad [\text{außen bei (00)}]. \quad (5, 5)$$

Längs der Störungslinie II bleibt überall  $F_2 = 0,667 U \sin \vartheta$  ungestört, das heißt die Ableitung  $F_2$  bleibt beim Überschreiten der Linie II stetig. Wir wollen zeigen, daß auch  $F$  stetig bleibt. Wir können  $F$  als Integral über  $F_2$  längs der Linie II ansehen. Daraus folgt die Stetigkeit von  $F$  aus der Stetigkeit von  $F_2$ . Ebenso gut können wir über  $F_1$  längs einer Charakteristik der ersten Schar von links bis an ihren Schnitt mit II integrieren. Da  $F_1$  links von II stetig ist, bleibt auch  $F$  stetig und hat längs II den ungestörten Wert. Längs der Störlinie II ist daher  $F$  ungestört ( $F = U \sin \vartheta r$ ),  $F_2$  ungestört ( $F_2 = -0,667 U \sin \vartheta$ ), dagegen  $F_1$  unstetig. Da aber  $F_1$  nach (5, 4) bei (00) bekannt ist, läßt sich die Fortpflanzung der Störung von  $F_1$  längs II nach (2, 7) berechnen. In der zweiten Spalte der Tabelle 1 sind die Werte von  $r$ ,  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  für die Punkte (00) bis (30) der Linie II zusammengestellt. Dazu ist noch eine Zahlenreihe  $\Delta$

Tabelle 1

Schema zur Berechnung der Strömung um einen freien Ring  
 $F, F_1, F_2, d\tilde{c}/dx$  stets dividiert durch  $U \sin \vartheta$  ( $M = 1,5$ )

Innen		0	0	1	2	3
3	$r$	4,725	4,725			
	$F$	4,725	4,725			
	$F_1$	0,667	- 0,825			
	$F_2$	- 0,667	- 0,667			
	$\Delta$		- 0,067			
2	$r$	5,150	5,150	5,150		
	$F$	5,150	5,150	4,201		
	$F_1$	0,667	- 0,766	- 0,803		
	$F_2$	- 0,667	- 0,667	- 0,734		
	$\Delta$		- 0,059	- 0,048		
1	$r$	5,575	5,575	5,575	5,575	
	$F$	5,575	5,575	4,661	3,684	
	$F_1$	0,667	- 0,714	- 0,759	- 0,803	
	$F_2$	- 0,667	- 0,667	- 0,726	- 0,782	
	$\Delta$		- 0,052	- 0,044	- 0,034	
0	$r$	6	6	6	6	6
	$F$	6	6	5,119	4,173	
	$F_1$	0,667	- 0,667	- 0,719	- 0,770	- 0,816
	$F_2$	- 0,667	- 0,667	- 0,719	- 0,770	- 0,816
	$\Delta$		- 0,047	- 0,040	- 0,033	
$d\tilde{c}/dx$			- 0,298	- 0,322	- 0,345	- 0,366
Außen		0	0	1	2	3
0	$r$	6	6	6	6	6
	$F$	6	6	6,822	7,586	
	$F_1$	0,667	0,667	0,624	0,580	0,537
	$F_2$	- 0,667	0,667	0,624	0,580	0,537
	$\Delta$		- 0,047	- 0,054	- 0,060	
$d\tilde{c}/dx$			0,298	0,279	0,260	0,240
1	$r$	6,425	6,425	6,425	6,425	
	$F$	6,425	6,425	7,219	7,953	
	$F_1$	0,667	0,667	0,628	0,589	
	$F_2$	- 0,667	0,620	0,570	0,520	
	$\Delta$		- 0,043	- 0,048	- 0,052	
2	$r$	6,850	6,850	6,850		
	$F$	6,850	6,850	7,616		
	$F_1$	0,667	0,667	0,632		
	$F_2$	- 0,667	0,577	0,522		
	$\Delta$		- 0,039	- 0,043		
3	$r$	7,275	7,275			
	$F$	7,275	7,275			
	$F_1$	0,667	0,667			
	$F_2$	- 0,667	0,538			
	$\Delta$		- 0,035			
$x$			0	0,95	1,90	2,85



angegeben; sie enthält die Werte  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_2$ , die für gleiche  $\Delta s$  nach (2, 7), (2, 8) in jedem Punkt einander gleich sind. Ganz analog liegen die Verhältnisse längs I an der Außenseite. Dabei empfiehlt es sich, die Zahlen für die Störlinie zweimal aufzuschreiben, zuerst für den ungestörten, dann für den gestörten Zustand. Dann kann man die Unstetigkeiten gut in der Zahlentafel verfolgen.

Nach diesen Vorarbeiten sind alle Voraussetzungen erfüllt, und man kann das unter den Ziffern 2 und 3 beschriebene Verfahren durchführen. Die Zahlen-tafel 1 zeigt die Anordnung der Rechnung für einige Intervalle. Wir haben dabei den Durchmesser des Zylinders mit 12 angenommen.

Wenn die Werte  $F_1$ ,  $F_2$  innen und außen längs der Wand des Zylinders berechnet sind, bestimmt man nach (2, 5)  $F_x$  und erhält nach (4, 4) sofort die Auftriebsverteilung. Figur 6 zeigt die Verteilung des Auftriebsbeiwertes

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = \frac{1}{R^2 \pi \sin \vartheta} \cdot \frac{d\bar{W}}{dx}$$

für die Außenseite, die Innenseite und den Gesamtauftrieb, bezogen auf den Querschnitt  $R^2\pi$  des Ringes.

Wenn die Störungscharakteristik (II in Figur 5) die Rotationsachse trifft, gibt es eine neue Unstetigkeit, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

## 6. Zylindrischer Ring über Rotationskörper

Ein unendlich langer Drehzylinder erfährt bekanntlich keinen Auftrieb in einer idealen Gasströmung. Es sei etwa ein Rotationskörper gegeben, der vorn eine ogivale Spitze hat, die in einen Zylinder übergeht. Ist der zylindrische Teil hinreichend lang, so wird sich gegen sein Ende die von der Spitze verursachte Störung ausgeglichen haben. Am Ende des Zylinders wird sich die Strömung annähernd so wie bei einem unendlich langen Zylinder verhalten. Ein solcher zylindrischer Körper mit ogivaler Spitze ist nicht stabil. Man hat mehrfach versucht, ihn durch Überziehen eines zylindrischen Ringes über das Zylinderheck zu stabilisieren. Wir wollen den Auftrieb berechnen, der durch den Ring bewirkt wird. In Figur 7 ist die Anordnung der Körper skizziert. Durch die Vorderkante des Ringes sind die Machschen Linien I und II gezeichnet. Links davon herrscht die Strömung des unendlichen Zylinders. Längs der Linien I und II tritt eine (unstetige) Störung ein. Von besonderem Interesse ist das Verhalten der nach innen laufenden Störung, die mehrfache Reflexionen an den Wänden erfährt. Der in dem Gebiet zwischen Rotationskörper und Ring gezeichnete charakteristische Streckenzug stellt eine Unstetigkeitslinie dar. Beim Überschreiten der Linie ist entweder  $F_1$  oder  $F_2$  unstetig.

Wir wollen aber das Verfahren in der Reihenfolge erläutern, wie es durchzuführen ist. Zuerst müssen wir uns die Funktionen  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  im ungestörten Teil der Strömung links von I, II verschaffen; dabei interessiert uns nur der unsymmetrische Teil.

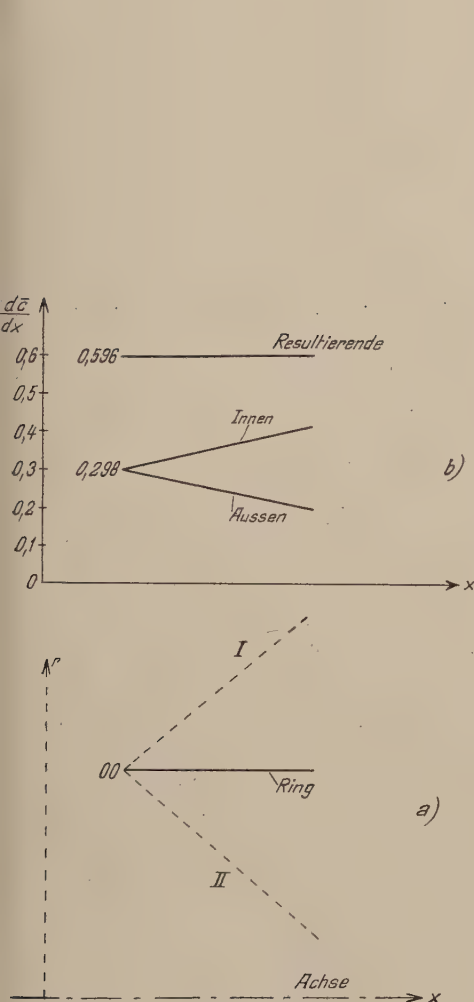


Fig. 6

Auftriebsverteilung am freien Ring.

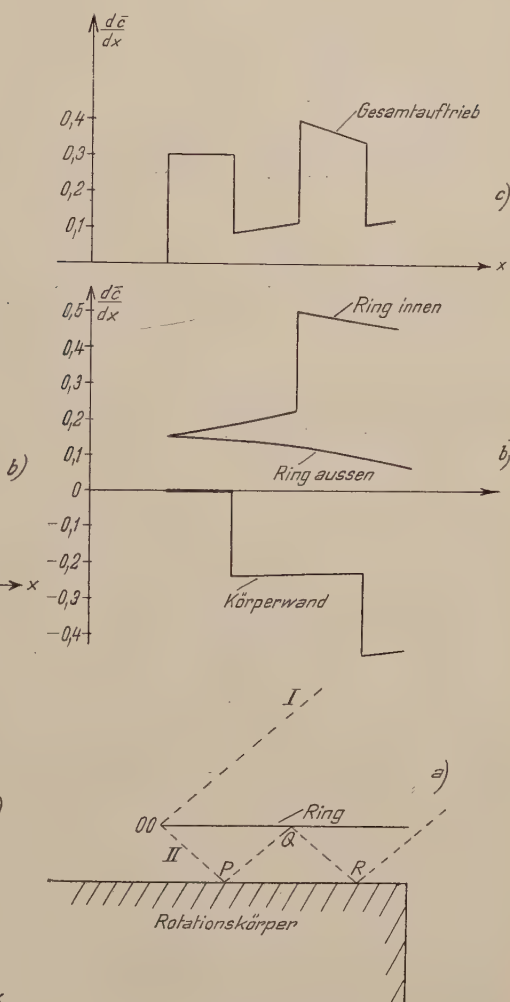


Fig. 7

Auftriebsverteilung für Ring über Zylinder.

Für einen unendlich langen Zylinder läßt sich die Potentialfunktion  $F$  leicht angeben. Die Strömung um den Zylinder muß ungeändert bleiben, wenn man den Zylinder in sich, das heißt in der  $x$ -Richtung verschiebt. Deshalb ist  $F$  unabhängig von  $x$ , also  $F_x = 0$ . Dann geht Gleichung (2, 1) in die gewöhnliche Differentialgleichung über

$$F_{rr} + \frac{1}{r} F_r - \frac{1}{r^2} F = 0 \quad (6, 1)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$F = A r + \frac{B}{r}; \quad F_r = A - \frac{B}{r^2}.$$

Die Konstanten  $A$ ,  $B$  sind so zu bestimmen, daß am Rande des Zylinders (für  $r = \bar{r}$ , wenn  $\bar{r}$  Zylinderradius ist)

$$F_r \Big|_{r=\bar{r}} = 0 \quad (6, 2)$$

ist; denn die Strömung muß tangential zur Wand verlaufen. Ferner muß für  $r \rightarrow \infty$  der Geschwindigkeitsvektor der Anströmung entsprechen, das heißt nach (5, 1)

$$F_r \Big|_{r \rightarrow \infty} = U \sin \vartheta. \quad (6, 3)$$

Daraus folgt schließlich:

$$F = U \sin \vartheta \left( r + \frac{\bar{r}^2}{r} \right) \quad (6, 4)$$

und dazu

$$F_x = 0; \quad F_r = U \sin \vartheta \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{r^2} \right). \quad (6, 5)$$

Aus (2, 4) folgen sofort  $F_1$  und  $F_2$ :

$$F_1 = \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{r^2} \right); \quad F_2 = - \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{r^2} \right). \quad (6, 6)$$

Auf den *Unstetigkeitslinien* I und II ist der Vorgang derselbe wie im vorigen Abschnitt. Auf der Linie I bleiben  $F$  und  $F_1$  ungestört (also stetig) und haben die Werte (6, 4) und (6, 6). Dagegen erfährt  $F_2$  bei (00) (Figur 7a) eine Störung, derart, daß die Randbedingung (3, 3) erfüllt ist. In unserem Falle ( $dr/dx = 0$ ) wird

$$F_2 \Big|_{00} = F_1 \Big|_{00} = \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{R^2} \right) \quad (\text{für den Außenbereich}),$$

wenn  $R$  der Ringradius ist. Die Änderung von  $F_2$  längs I ist wieder durch (2, 8) bestimmt. Dabei hat man in (2, 8) für  $F_1$  und  $F$  längs I die ungestörten Werte gemäß (6, 6) und (6, 4) einzusetzen. Damit kennt man längs I alle Größen und kann das Verfahren durchführen.

Ganz entsprechend bleiben im Innenbereich  $F$  und  $F_2$  längs II erhalten nach (6, 4) und (6, 6); dagegen ist  $F_1$  unstetig und hat bei (00) den Wert

$$F_1 \Big|_{00} = F_2 \Big|_{00} = - \frac{U \sin \vartheta}{M} \left( 1 - \frac{\bar{r}^2}{R^2} \right) \quad (\text{für den Innenbereich}).$$

Die Änderung von  $F_1$  längs II erfolgt nach (2, 7). Jetzt läßt sich nach dem Charakteristikenverfahren der Ziffern 2 und 3  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  im Bereich des Dreiecks (00),  $P$ ,  $Q$  berechnen. Die Linie  $PQ$  ist wieder eine Unstetigkeitslinie. Da

sie zur Schar I der Charakteristiken gehört, bleiben  $F$ ,  $F_1$  stetig,  $F_2$  wird unstetig.  $F_2$  ist aber in  $P$  aus der Randbedingung bekannt, so daß seine Änderung längs  $PQ$  aus (2, 8) berechnet wird. Die Berechnung geschieht daher folgendermaßen: Man bestimmt zunächst in  $P$  und auf  $PQ$  die Funktionen  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  so, als ob die Wand bei  $P$  nicht vorhanden wäre, also genau nach dem Charakteristikenverfahren von Ziffer 2. Dann wird die Störung berücksichtigt, die durch die Wand bei  $P$  entsteht. Längs  $II$  kommend, kennt man in  $P$  die Größe  $F_1$  und erhält aus der Randbedingung  $F_2$ . Längs  $PQ$  behält man  $F$ ,  $F_1$  aus der ersten Rechnung bei und bestimmt damit  $F_2$  nach (2, 8). In derselben Weise verfährt man auf  $QR$  usw. Die Durchführung bereitet keine Schwierigkeiten und verlangt wenig Aufwand (siehe Tabelle 2).

Es sei bemerkt, daß es im allgemeinen nicht nötig ist, die Unstetigkeiten längs der Linien  $PQR$  besonders zu beachten. Man kann das Verfahren der Ziffern 2 und 3 im ganzen Innengebiet hinter der Störlinie  $II$  anwenden. Der dadurch entstehende Fehler bleibt nach meinen Erfahrungen innerhalb der üblichen Rechengenauigkeit, wenn die Intervalle klein genug sind.

In Figur 7b sind die Auftriebsverteilungen, das heißt die Funktionen  $d\bar{c}/dx$ , bezogen auf den Querschnitt des Ringes, für die einzelnen Flächen aufgezeichnet. An der *Oberfläche des Zylinders* herrscht, wie beim unendlich langen Zylinder, zunächst der Auftrieb 0 bis zum Punkt  $P$ . Bei  $P$  entsteht ein *Abtrieb*, der bis  $R$  fast konstant bleibt und bei  $R$  nochmals beträchtlich abfällt. An der *Außenseite des Ringes* entsteht ein Auftrieb, der langsam nach hinten abklingt. An der *Innenseite des Ringes* beginnt die Auftriebskurve im gleichen Punkt wie an der Außenseite (da innen und außen  $dr/dx = 0$  sind), dann steigt der Auftrieb allmählich an bis zum Punkt  $Q$ . Hier springt er plötzlich auf etwa den dreifachen Wert.

Durch Vergleich mit Figur 6 erkennt man, daß der Auftrieb, der an der Vorderkante des Ringes entsteht, infolge des eingeschobenen Zylinders nur etwa halb so groß ist wie derjenige des freien Ringes von Figur 6.

Figur 7c zeigt schließlich die resultierende Auftriebsverteilung, die durch die Strömung auf die Kombination Zylinder mit Ring übertragen wird. Der Gesamtauftrieb ist nur ein Bruchteil desjenigen, den der frei stehende Ring erfährt. Das ist zum Teil durch die gestörte Anströmung, zum andern Teil durch die Reflexion der Störung an den Rändern bedingt. Der Rechnung lag ein Verhältnis Ringradius  $R$  zu Zylinderradius  $\bar{r}$  von

$$R : \bar{r} = 1,385$$

zugrunde.

## 7. Zylindrischer Ring über konischem Zapfen

Der gleiche zylindrische Ring kann einen wesentlich größeren Auftrieb erzeugen, wenn man die Anordnung etwas abändert. Dem zylindrischen Rota-



Tabelle 2

*Schema zur Berechnung der Strömung zwischen Ring- und Zylinderwand*

*Die stark ausgezogenen Streckenzüge bezeichnen die Unstetigkeitslinien ( $M = 1.5$ )*

tionskörper geben wir ein konisches Heck, dessen Verjüngungswinkel wir so wählen, daß die Strömung gut folgen kann (ca.  $6,7^\circ$ ). Am Ende des Konus bringen wir den Ring an, und zwar so, daß die durch die Vorderkante [Punkt (00) in Figur 8a] gehende Machsche Linie nicht mehr am Rotationskörper reflektiert wird. Das Ende des konischen Teiles ist wieder zylindrisch ausgebildet, wie Figur 8a zeigt. Bei dieser Anordnung geht durch den Anfangspunkt  $T$  des konischen Teiles die erste Störlinie ( $I^0$ ). Durch die Vorderkante (00) des Ringes geht nach außen die Störlinie  $I^1$  und nach innen II. Schließlich geht durch das Ende des Konus ( $S$ ) noch eine Störlinie  $I^3$ . Die Durchführung

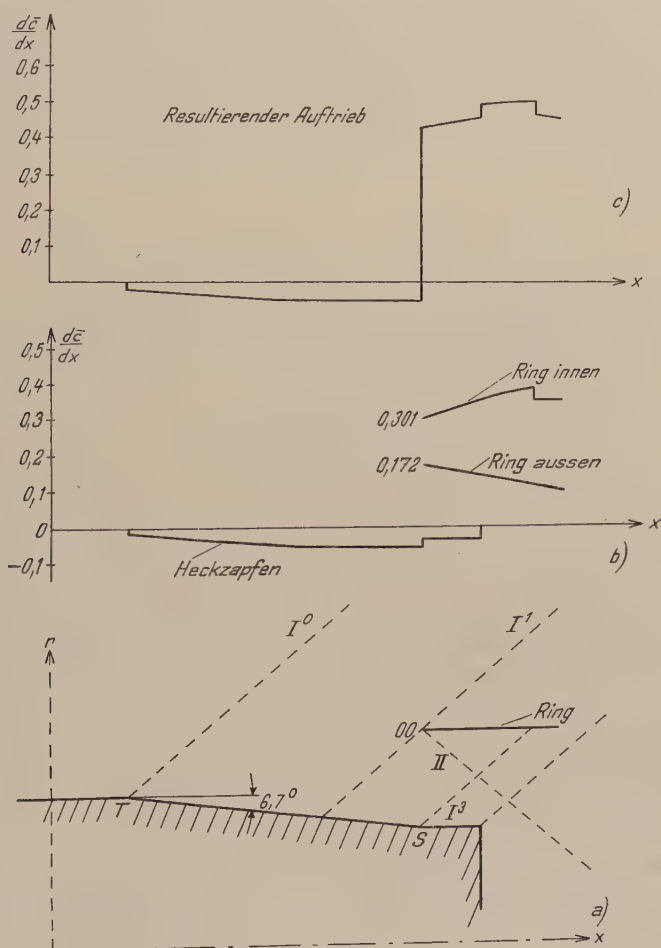


Fig. 8

Auftriebsverteilung für Ring über konischem Zapfen.

der Berechnung bietet nichts Neues. Sie verläuft genau wie im vorigen Abschnitt.

Das Ergebnis ist jedoch wesentlich verschieden. Wir wollen die in Figur 8b eingezeichneten Auftriebsverteilungen mit denen von Figur 7 vergleichen. Zunächst entsteht längs des konischen Zapfens ein kleiner Abtrieb, der über dem Punkt  $S$  einen Sprung hat. Die *Außenseite des Ringes* erfährt einen Auftrieb, der demjenigen von Figur 7b ähnlich ist. Er liegt aber höher; der Anfangswert ist 0,17, gegenüber 0,15 in Figur 7a. Besonders groß ist der Unterschied an der *Innenseite des Ringes*. Hier liegt der Anfangswert bei 0,30 im Gegensatz zu 0,15 bei Figur 7b. Dann steigt die Kurve der Figur 8b gleichmäßig an bis zur Störlinie  $I^3$ , wo eine kleine Unstetigkeit erscheint. Der Gesamtauftrieb des Ringes in der Anordnung 8a ist also beträchtlich größer als bei 7a. Wählt man etwa einen Ring von ca. 5 cm Länge bei  $R = 6$  cm, so ist der Auftrieb bei der Anordnung 8a ein Mehrfaches von demjenigen in 7a. Aber auch bei dieser günstigen Anordnung bleibt der Auftrieb unter demjenigen des freien Zylinder-ringes (Figur 5).

## 8. Beliebiger Ring über beliebigem Körper

Zum Schluß sei noch die Anwendung des Verfahrens auf allgemeinere Probleme erläutert. Wir betrachten einen beliebigen, jedoch schlanken und vorn spitzen Rotationskörper, über dessen Ende ein Ring von beliebigem Profil geschoben ist (Figur 1). Dabei muß das Profil des Ringes schlank und vorn scharfkantig sein. Zur Berechnung der Strömung um ein solches Gebilde empfiehlt sich folgender Vorgang: Man legt durch die Vorderkante des Ringes die Machsche Linie  $I$  und bestimmt ihren Schnittpunkt  $B$  mit dem Meridian des Körpers und  $A$  mit der Rotationsachse. Dann berechnet man die Strömung um den Rotationskörper von der Spitze  $S$  bis zum Parallelkreis durch  $B$  mittels einer Quellsenkenverteilung für den symmetrischen Teil und einer Dipolverteilung für den unsymmetrischen Teil. Die Quellen und Dipole verteilen sich auf dem Stück  $SA$  der Achse. Zur numerischen Bestimmung dieser Quell- und Dipolverteilungen sind verschiedene Verfahren entwickelt, die im wesentlichen auf den Untersuchungen von VON KÁRMÁN und MOORE<sup>1)</sup> und VON KÁRMÁN und TSIEN<sup>2)</sup> aufbauen und in den neueren Lehrbüchern eingehend beschrieben sind. Kennt man diese Verteilungen, so kennt man auch die Funktionen und  $F(1, 8)$  längs der Machschen Linie  $I$  durch  $(A)$ . Von hier aus beginnt man mit dem Charakteristikenverfahren, welches sich in der gleichen Weise anwenden läßt wie unter Ziffer 6 oder 7. Man sieht unmittelbar, daß auch das Anbringen mehrerer Ringe keine neuen Schwierigkeiten bringt. Natürlich besteht die Möglichkeit, das Charakteristikenverfahren von der Spitze beginnend auch für den

<sup>1)</sup> VON KÁRMÁN und MOORE, Am. Soc. Mech. Eng. 54, 303 (1932).

<sup>2)</sup> TSIEN und SHUE-SHEN, J. Aeron. Sci. 5, 480-483 1938).

Rotationskörper zu benutzen, aber der Zeitaufwand dürfte etwas größer sein als beim Quell-Dipol-Verfahren. Der Vorteil des Charakteristikenverfahrens tritt besonders bei den Ringen und komplizierteren Anordnungen hervor.

### *Summary*

The supersonic flow of an ideal gas past an inclined slender body of revolution, can be approximately determined by linearization of the differential equations. For this purpose generally a distribution of sources, sinks and doublets is taken (VON KÁRMÁN, MOORE, TSIEN). For a composed body of revolution having a central body and several rings, this procedure is cumbersome. It is shown that such flows can very simply be determined by means of a characteristics-method. Surfaces of discontinuity and their multiple reflexion on the walls do not present much difficulty. The method is illustrated by some simple examples. It is to be mentioned that the method can be extended also to the general, not linearized, differential equations.

(Eingegangen: 26. 12. 1950.)

## Zur Theorie und Berechnung des elektrostatischen Durchgriffs der ebenen und zylindrischen Dreipolröhre im Falle zweidimensionaler Potentialverhältnisse

### 1. Mitteilung

VON MAX LANDSBERG, Dresden<sup>1)</sup>

Einen guten Einblick in die Feldverhältnisse der Elektrodensysteme der gebräuchlichen Vakuumröhren mit einem oder auch mit mehreren Gittern liefern schon die entsprechenden Untersuchungen für die verhältnismäßig einfach aufgebaute Platten- und Zylinderröhre. Derartige Untersuchungen sind sowohl experimentell mit Hilfe des elektrolytischen Trops und des Gummimembranapparates [1], [2]<sup>2)</sup> als auch theoretisch durchgeführt worden. Im letzten Fall ist die Berechnung der Röhrenkapazitäten und des aus ihnen sich ergebenden elektrostatischen Durchgriffs von grundlegender Bedeutung. Über den gegenwärtigen Stand der Durchgriffsberechnung für die beiden genannten Systeme berichtet ausführlich eine Arbeit von I. RUNGE [3]. Hier sind alle wichtigen Formeln zusammengestellt, die aber ausnahmslos, was das ebene und zylindrische System (mit Stabgitter) anbetrifft, nicht nur zweidimensionale Verhältnisse, sondern auch noch weitere Einschränkungen hinsichtlich der Verhältnisse Gitterdrahradius zu Gitter-Anoden-Abstand usw. voraussetzen.

<sup>1)</sup> Technische Hochschule Dresden.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 393.



Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, Durchgriffsformeln aufzustellen, die von den erwähnten zusätzlichen Einschränkungen frei sind und also nur noch zweidimensionale Potentialverhältnisse voraussetzen.

Mit Hilfe der Weierstraßschen Funktionen<sup>1)</sup> gelangt man zu einem System von unendlich vielen linearen Gleichungen<sup>2)</sup>, das durch gewisse Potenzreihen nach den unendlich vielen Unbekannten aufgelöst werden kann. Damit treten auch in den gesuchten allgemeinen Durchgriffsformeln Reihenentwicklungen auf<sup>3)</sup>, deren Koeffizienten sich durch einfache Rekursionsformeln angeben lassen.

## 1. Der Durchgriff der ebenen Dreipolröhre

### 1.1 Die Problemstellung

Unter den bekannten Voraussetzungen, die eine Durchgriffsberechnung mit Hilfe der Funktionentheorie gestatten, liegt hier der durch Figur 1 gekennzeichnete Sachverhalt vor. In einer komplexen  $z$ -Ebene ( $z = x + i y$ ) ist ein sich ins Unendliche erstreckender Bereich gegeben, der von der Kathode  $K$ , der Anode  $A$  und den Kreisen des Gitters  $G$  begrenzt wird. Die Bedeutung der im folgenden vorkommenden Größen  $a, k, s, \varrho$  ist aus Figur 1 ersichtlich.

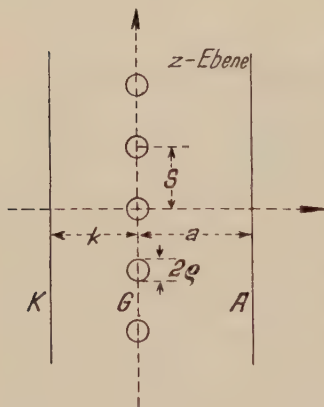


Fig. 1

Die Betrachtung der bisher vorhandenen Durchgriffsformeln für die Plattenröhre, die in der ersten Tabelle der Rungeschen Arbeit zusammengestellt sind, zeigt, daß für den Durchgriff  $D$  ganz allgemein eine Darstellung von der Form

$$D = \frac{-\ln \frac{\varrho}{s} + \Phi\left(\frac{a}{s}, \frac{k}{s}, \frac{\varrho^2}{s^2}\right)}{\Psi\left(\frac{a}{s}, \frac{k}{s}, \frac{\varrho^2}{s^2}\right)} \quad (1)$$

gelten wird. Da sich die von den angegebenen Argumenten abhängigen Funktionen  $\Phi, \Psi$  nicht geschlossen darstellen lassen, sollen für sie Reihenentwicklungen der Gestalt

$$\Phi\left(\frac{a}{s}, \frac{k}{s}, \frac{\varrho^2}{s^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\frac{\varrho}{s}\right)^{2m}, \quad \Psi\left(\frac{a}{s}, \frac{k}{s}, \frac{\varrho^2}{s^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \left(\frac{\varrho}{s}\right)^{2m} \quad (1a)$$

angegeben werden, wo die Koeffizienten  $c_m, d_m$  nur von  $a/s, k/s$  abhängen.

<sup>1)</sup> Siehe auch M. LAGALLY [4] und eine von I. RUNGE [3] zitierte Arbeit von L. ROSENHEAD und D. DAYMOND.

<sup>2)</sup> Siehe hierzu die beiden Dissertationen von H. WALTER [5] und J. F. BÖTTCHER [6].

<sup>3)</sup> Man vergleiche hierzu einen Aufsatz von F. SOMMER [7].

## 1.2 Die Berechnung eines komplexen Näherungspotentials

Ist  $Q$  der «Ladungsbelag» eines Gitterkreises (zum Beispiel im praktischen Maßsystem in C/cm), so kann an Stelle des in 1.1 erwähnten Bereiches auf Grund der «Methode der elektrischen Bilder» [8] auch der Bereich  $B$  betrachtet werden, der von den Kreisen mit dem Radius  $\varrho$  und der Ladung  $Q$  bzw.  $-Q$  begrenzt wird, deren Mittelpunkte bei

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \quad \text{bzw.} \quad 2a + m'_1 \omega_1 + m'_2 \omega_2$$

liegen. Hierbei ist  $\omega_1 = 2(a + k)$ ,  $\omega_2 = i s$  und die ganzen Zahlen  $m_1, m_2, m'_1, m'_2$  können unabhängig voneinander jeden positiven oder negativen Wert (einschließlich der Null) annehmen.

Die unendlich vielen Kreise erzeugen durch ihre Ladungen im Bereich  $B$  ein Feld, das durch die «komplexe Feldstärke»  $W'(z)$  charakterisiert wird.  $W'(z)$  ist eine (eindeutige) analytische doppeltperiodische (aber nicht elliptische) Funktion, die allerdings durch die gemachten Angaben noch nicht vollständig bestimmt ist. Die analytische Fortsetzung von  $W'(z)$  ins Innere der Kreise hinein zeigt, daß diese Funktion in jedem Kreis unendlich viele Singularitäten besitzt, die sämtlich (wie auch  $z = \infty$ ) wesentlich singulär sind.

Es soll nun zuerst  $W'(z)$  näherungsweise durch eine doppeltperiodische meromorphe (also elliptische) Funktion  $w'(z)$  mit den angegebenen Perioden  $\omega_1, \omega_2$  ersetzt werden, die folgende Bedingungen erfüllt:

1.  $w'(z)$  ist in der ganzen Ebene regulär bis auf die Stellen

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \quad \text{bzw.} \quad 2a + m'_1 \omega_1 + m'_2 \omega_2,$$

wo  $w'(z)$  Pole  $(n+1)$ -ter Ordnung ( $n \geq 1$ ) mit dem Residuum

$$-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \quad \left( \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} \text{ F/cm} \right)$$

hat.

2. Es soll

$$\int_{(L)} w'(z) dz = -\frac{i}{\epsilon_0} Q_k \quad (2)$$

sein, wo  $Q_k$  die Ladung der Kathode für ein Stück von der Länge  $s$  ist. Nach zweckmäßiger Umwandlung der  $z$ -Ebene in einen geradlinigen Schlitzbereich, wobei jeder Punkt  $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$  geradlinig mit  $2a + m'_1 \omega_1 + m'_2 \omega_2$  verbunden ist, soll der angegebene Integrationsweg  $L$  ganz im Innern dieses Bereiches verlaufen und irgendeinen Punkt  $z_0$  mit  $z_0 + \omega_2$  verbinden.

3. Ist  $w(z)$  ein Integral von  $w'(z)$ , so soll der Realteil dieses «komplexen Potentials» auf dem Gitterkreis mit dem Mittelpunkt  $z = 0$  (also für  $z = \varrho e^{i\varphi}$ )

eine Fourier-Entwicklung besitzen, deren von  $\varphi$  abhängiger Teil die Gestalt

$$A_{n+1} \cos(n+1) \varphi + A_{n+2} \cos(n+2) \varphi + \dots$$

habe. Die Fourier-Koeffizienten  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sollen also sämtlich Null sein.

Durch diese drei Forderungen ist bei gegebenem  $n$  das komplexe Potential  $w(z)$  bis auf eine additive Konstante<sup>1)</sup> bestimmt. Der Hauptteil von  $w'(z)$  für  $z = 0$  sei nun in der Gestalt

$$-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{r=1}^n \frac{r p_r}{z^{r+1}} \quad (3)$$

angesetzt, wo  $p_r$  reell sein muß. Damit nun die zur imaginären Achse parallelen und durch die Punkte  $z = a + m(a + k)$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) hindurchgehenden Geraden zu den Niveaulinien gehören, die der Realteil von  $w(z)$  besitzt, muß wegen (3) der Hauptteil von  $w'(z)$  für  $z = 2a$

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z-2a} + \sum_{r=1}^n \frac{r(-1)^r p_r}{(z-2a)^{r+1}} \quad (4)$$

lauten. Aus (3) und (4) folgt dann mit Hilfe der Weierstraßschen  $\zeta$ -Funktion und ihrer Ableitungen<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} w'(z) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} [\zeta(z-2a) - \zeta(z)] \\ &+ \sum_{r=1}^n \frac{p_r}{(r-1)!} [\zeta^{(r)}(z-2a) - (-1)^r \zeta^{(r)}(z)] + H, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo die reelle Konstante  $H$  einem homogenen, zur reellen Achse parallelen Feld entspricht.

$H$  läßt sich nun leicht durch  $p_1$  ausdrücken. Auf Grund einfacher Überlegungen, die mit dem sogenannten Elementarintegral dritter Gattung zusammenhängen [10], ergibt sich mit Berücksichtigung von (2)

$$\begin{aligned} \int_{(L)} [\zeta(z-2a) - \zeta(z)] dz &= - \int_{(L)} \int_{(L')} \zeta'(u-z) du dz \\ &= - \int_{(L')} [\zeta(z_0 - u + \omega_2) - \zeta(z_0 - u)] du = -2a\eta_2, \end{aligned}$$

wo neben  $L$  (mit der unteren Integrationsgrenze  $z_0$ ) als zweiter Integrationsweg  $L'$  die geradlinige Verbindungsstrecke von  $z = 0$  nach  $z = 2a$  mit  $z = 0$

<sup>1)</sup> Unwesentliche additive Konstanten sind im folgenden stets weggelassen.

<sup>2)</sup> Man vergleiche hier und im folgenden zum Beispiel das bekannte Lehrbuch der Funktionentheorie von A. HURWITZ und R. COURANT [9].

als unterer Integrationsgrenze genommen und außerdem von der Formel

$$\zeta(z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) = \zeta(z) + m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2$$

mit

$$\eta_1 = 2 \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \eta_2 = 2 \zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$$

Gebrauch gemacht wurde. Wegen (5) ist dann

$$\int_{(L)} w'(z) dz = -\frac{Q}{\pi \varepsilon_0} a \eta_2 + 2 p_1 \eta_2 + H \omega_2 = -\frac{i}{\varepsilon_0} Q_k,$$

so daß

$$H = -\frac{1}{\varepsilon_0 s} Q_k + \left( \frac{Q}{\pi \varepsilon_0} a - 2 p_1 \right) \frac{\eta_2}{\omega_2}$$

ist. Damit erhält man unter Verwendung der mit  $\zeta(z)$  durch die Beziehung

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

verknüpften  $\sigma$ -Funktion für das komplexe Potential  $w(z)$  die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0} \log \frac{\sigma(z - 2a)}{\sigma(z)} \\ &+ \sum_{r=1}^n \frac{p_r}{(r-1)!} [\zeta^{(r-1)}(z - 2a) - (-1)^r \zeta^{(r-1)}(z)] \\ &+ \left[ -\frac{1}{\varepsilon_0 s} Q_k + \left( \frac{Q}{\pi \varepsilon_0} a - 2 p_1 \right) \frac{\eta_2}{\omega_2} \right] z. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Um die Größen  $p_r$  entsprechend der oben angegebenen dritten Bedingung, die  $w(z)$  erfüllen soll, zu bestimmen, seien zunächst die beiden Reihen

$$\log \sigma(z) = \log z + \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad \log \sigma(z - 2a) = \log(-1) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \quad (7)$$

angegeben, wo  $a_m, b_m$  reell sind. Die Koeffizienten der ersten Reihe können einfach durch die Invarianten  $g_2, g_3$  ausgedrückt werden und sind bekannt<sup>1)</sup>; die Koeffizienten der zweiten Reihe lassen sich leicht unter Verwendung der bekannten Relation

$$p'^2(z) = 4 p^3(z) - g_2 p(z) - g_3^2$$

angeben. So ist

$$a_{2m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad a_0 = a_2 = 0, \quad a_4 = -\frac{g_2}{240}, \quad a_6 = -\frac{g_3}{840} \text{ usw.}$$

<sup>1)</sup> Siehe H. BURKHARDT [10], Seite 52.

<sup>2)</sup> Hier und im folgenden ist das Weierstraßsche  $p$  mangels der entsprechenden Type durch « $p$ » wiedergegeben.



und

$$b_0 = \ln \sigma(2a), \quad b_1 = -\zeta(2a),$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} p'(2a), \quad b_3 = \frac{1}{6} p''(2a), \quad b_4 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{12} g_2 - p^2(2a) \right) \quad \text{usw.}$$

Durch fortgesetztes Differenzieren von (7) ergibt sich weiter

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r!} \zeta^{(r-1)}(z) &= -\frac{(-1)^r}{r z^r} + \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} a_{m+r} z^m, \\ \frac{1}{r!} \zeta^{(r-1)}(z-2a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r}{r} b_{m+r} z^m. \end{aligned} \right\} \quad (r=1, 2, \dots) \quad (8)$$

Mit Hilfe von (7) und (8) erhält man dann für  $w(z)$  aus (6) die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log z + \sum_{r=1}^n \frac{p_r}{z^r} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^n r p_r \binom{m+r}{r} [b_{m+r} - (-1)^r a_{m+r}] z^m \\ &+ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - a_m) z^m + \left[ -\frac{1}{\epsilon_0 s} Q_k + \left( \frac{Q_a}{\pi\epsilon_0} - 2p_1 \right) \frac{\eta_2}{\omega_2} \right] z. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit  $z = \varrho e^{i\varphi}$  für den Realteil von  $w(z)$  die Fourier-Darstellung

$$V_g + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\varphi \quad (9a)$$

mit dem Mittelwert<sup>1)</sup>

$$V_g = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sigma(2a)}{\varrho} + \sum_{r=1}^n r [b_r - (-1)^r a_r] p_r \quad (9)$$

und den  $n$  ersten Koeffizienten (die übrigen sind für das Folgende ohne Bedeutung)

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{p_m}{\varrho^m} + \varrho^m \sum_{r=1}^n r \binom{m+r}{r} \left[ b_{m+r} - (-1)^r a_{m+r} - \frac{\eta_2}{\omega_2} \delta_{1m} \delta_{1r} \right] p_r \\ &+ \varrho^m \left[ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left( b_m - a_m + 2a \frac{\eta_2}{\omega_2} \delta_{1m} \right) - \frac{Q_k}{\epsilon_0 s} \delta_{1m} \right], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$(m=1, 2, \dots, n),$$

wo die Symbole  $\delta_{1m}$ ,  $\delta_{1r}$  die bekannte Bedeutung haben.

<sup>1)</sup> Man vergleiche im folgenden auch eine Arbeit des Verfassers [11].

Damit hat man für die  $n$  Größen  $p_r$  die  $n$  linearen Gleichungen  $A_m = 0$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ), so daß die komplexe Feldstärke  $w'(z)$  entsprechend den oben angegebenen Bedingungen bestimmt ist.

1.3 Die Elektrodenpotentiale

Um eine Darstellung für das Kathodenpotential  $V_k$  und das Anodenpotential  $V_a$  zu finden, muß man die Relationen

$$\sigma(z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) = (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} e^{(m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2)} \left( z + \frac{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2}{2} \right) \sigma(z)$$
$$\zeta^{(r-1)}(-z) = (-1)^r \zeta^{(r-1)}(z) \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

beachten. Mit ihnen erhält man aus (6)

$$V_k = Re[w(-k)] = \left( \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0} a - p_1 \right) \left( \eta_1 - \frac{2 \eta_2}{\omega_2} k \right) + \frac{k}{\varepsilon_0 s} Q_k$$
$$V_a = Re[w(a)] = \left( \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0} a - p_1 \right) \frac{2 a \eta_2}{\omega_2} - \frac{a}{\varepsilon_0 s} Q_k.$$

In Verbindung mit (9) und mit Berücksichtigung der Legendreschen Relation

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2 \pi i$$

ergibt sich dann für die Gitterspannung  $U_g$  und die Anodenspannung  $U_a$

$$\left. \begin{aligned} U_g = V_g - V_k &= \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \frac{\sigma(2 a)}{Q} + \sum_{r=1}^n r [b_r - (-1)^r a_r] p_r \\ &\quad - \left( \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0} a - p_1 \right) \left( \eta_1 - \frac{2 k \eta_2}{\omega_2} \right) - \frac{k}{\varepsilon_0 s} Q_k, \\ U_a = V_a - V_k &= - \frac{2 \pi}{s} \left( \frac{Q}{2 \pi \varepsilon_0} a - p_1 \right) - \frac{\omega_1}{2 \varepsilon_0 s} Q_k. \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

1.4 Ein unendliches Gleichungssystem und seine Lösung

Da  $w(z)$  nur eine Näherungsfunktion für das genaue komplexe Potential ist, stellen auch die Ausdrücke für  $V_g$ ,  $V_k$  usw. nur Näherungswerte dar. Um zu exakten Ergebnissen zu kommen, soll nun der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  vollzogen werden.

Bekanntlich ist  $\sigma(z)$  eine homogene Funktion ersten Grades der drei Argumente  $z$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , und aus

$$\sigma\left(\frac{\lambda z}{\lambda \omega_1}, \lambda \omega_2\right) = \lambda \sigma\left(\frac{z}{\omega_1}, \omega_2\right) \qquad (\lambda \neq 0)$$

folgt

$$\zeta^{(r-1)}\left(\frac{\lambda z}{\lambda \omega_1}, \lambda \omega_2\right) = \frac{1}{\lambda^r} \zeta^{(r-1)}\left(\frac{z}{\omega_1}, \omega_2\right). \quad (r = 1, 2, \dots)$$

Daher ergibt sich für die in (10) vorkommenden Größen  $a_m$  und  $b_m$ , deren Abhängigkeit von  $a$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  vorübergehend genauer gekennzeichnet sei, auf Grund der Reihenentwicklungen (7)

$$a_m(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{s^m} a_m(\omega_1^*, \omega_2^*), \quad b_m(a, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{s^m} b_m\left(\frac{a}{s}, \omega_1^*, \omega_2^*\right) \\ (m = 1, 2, \dots),$$

wo

$$\omega_1^* = 2 \frac{a + k}{s}, \quad \omega_2^* = i$$

gesetzt ist. Eine entsprechende Umformung gilt im besonderen für  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  usw.

Führt man nun mit Hilfe der angegebenen Beziehungen die Perioden  $\omega_1^*$ ,  $\omega_2^*$  in (10) ein und verwendet man dann wieder die alten Bezeichnungen, so ergibt sich schließlich für die zum exakten komplexen Potential  $W(z)$  gehörigen Größen  $p_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) das unendliche Gleichungssystem

$$\frac{p_m}{s^m} + \left(\frac{\rho}{s}\right)^{2m} \sum_{r=1}^{\infty} k_{mr} \frac{p_r}{s^r} = \left(\frac{\rho}{s}\right)^{2m} \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} f_{m0} + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} g_{m0} \right), \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

wo zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} k_{mr} &= r \binom{m+r}{r} [b_{m+r} - (-1)^r a_{m+r} + i \eta_2 \delta_{1m} \delta_{1r}], \\ f_{m0} &= a_m - b_m + \frac{2i a}{s} \eta_2 \delta_{1m}, \\ g_{m0} &= 2\pi \delta_{1m} \end{aligned} \right\} \quad (m, r = 1, 2, \dots),$$

gesetzt ist.

Zur Lösung von (12) sei der Ansatz

$$\frac{p_m}{s^m} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{r=0}^{\infty} f_{mr} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{2m+2r} + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \sum_{r=0}^{\infty} g_{mr} \left(\frac{\rho}{s}\right)^{2m+2r}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

gemacht. Durch ihn zerfällt (12), da  $Q$  und  $Q_k$  voneinander linear unabhängig sind, in zwei weitere gleichgebaute Gleichungssysteme, und der Koeffizientenvergleich in bezug auf die Potenzen von  $(\rho/s)^2$  liefert die einfachen Rekursionsformeln

$$\left. \begin{aligned} f_{mr} &= -k_{m1} f_{1,r-1} - k_{m2} f_{2,r-2} - \dots - k_{mr} f_{r0}, \\ g_{mr} &= -k_{m1} g_{1,r-1} - k_{m2} g_{2,r-2} - \dots - k_{mr} g_{r0}. \end{aligned} \right\} \quad (m, r = 1, 2, \dots)$$

Hieraus folgt für die Koeffizienten  $f_{mr}$  (und ganz entsprechend für die  $g_{mr}$ )

$$\begin{aligned} f_{m1} &= -k_{m1} f_{10} \\ f_{m2} &= k_{m1} k_{11} f_{10} - k_{m2} f_{20} \\ f_{m3} &= (k_{m2} k_{21} - k_{m1} k_{11}^2) f_{10} + k_{m1} k_{12} f_{20} - k_{m3} f_{30} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

so daß die Reihenentwicklung (13) als bekannt angesehen werden kann.

### 1.5 Die Berechnung des Durchgriffs

Mit (11) und (13) erhält man jetzt für die Gitter- und Anodenspannung die genauen Werte

$$\left. \begin{aligned} U_g &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{s}{\varrho} + \ln \sigma \left( \frac{2a}{s} \right) - \frac{a}{s} \left( \eta_1 + 2i\eta_2 \frac{k}{s} \right) + \sum_{r=1}^{\infty} f_r \left( \frac{\varrho}{s} \right)^{2r} \right] \\ &\quad + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} g_r \left( \frac{\varrho}{s} \right)^{2r} - \frac{2\pi k}{s} \right] \\ U_a &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2\pi a}{s} + 2\pi \sum_{r=1}^{\infty} f_{1,r-1} \left( \frac{\varrho}{s} \right)^{2r} \right] \\ &\quad + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \left[ -\omega_1 \pi + 2\pi \sum_{r=1}^{\infty} g_{1,r-1} \left( \frac{\varrho}{s} \right)^{2r} \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wo

$$\begin{aligned} f_r &= k_{01} f_{1,r-1} + k_{02} f_{2,r-2} + \dots + k_{0r} f_{r0} + \left( \eta_1 + 2i\eta_2 \frac{k}{s} \right) f_{1,r-1}, \\ g_r &= k_{01} g_{1,r-1} + k_{02} g_{2,r-2} + \dots + k_{0r} g_{r0} + \left( \eta_1 + 2i\eta_2 \frac{k}{s} \right) g_{1,r-1}, \\ k_{0r} &= r [b_r - (-1)^r a_r] \\ &\quad (r = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

st.

Löst man (14) nach  $Q_k/(2\pi\epsilon_0)$  auf<sup>1)</sup>, so findet man auf Grund bekannter Zusammenhänge leicht die Röhrenkapazitäten und damit den elektrostatischen Durchgriff

$$D_{Pl} = \frac{s}{2\pi a} \cdot \frac{\ln \frac{s}{\varrho} + \ln \sigma \left( \frac{2a}{s} \right) - \frac{a}{s} \left( \eta_1 + 2i\eta_2 \frac{k}{s} \right) + \sum_{r=1}^{\infty} f_r \left( \frac{\varrho}{s} \right)^{2r}}{1 - \frac{s}{a} \sum_{r=1}^{\infty} f_{1,r-1} \left( \frac{\varrho}{s} \right)^{2r}}. \quad (14a)$$

<sup>1)</sup> Wird (14) als ein Gleichungssystem für die beiden Unbekannten  $Q/(2\pi\epsilon_0)$ ,  $Q_k/(2\pi\epsilon_0)$  aufgefaßt, so kann die Koeffizientendeterminante nicht identisch Null sein, da sich ihr Betrag für  $s/\varrho \rightarrow 0$  dem Wert  $\omega_1 \pi \ln(s/\varrho)$  nähert.

Die Reihen (1a) sind daher als bekannt anzusehen; so ist ohne die im Verlauf der Rechnung eingeführten Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_0 &= \ln \sigma \left( \frac{2a}{s} \right) - \frac{a}{s} \left( \eta_1 + 2i \eta_2 \frac{k}{s} \right), \\ c_1 &= \left[ \zeta \left( \frac{2a}{s} \right) + 2i \eta_2 \frac{a}{s} \right] \left[ -\zeta \left( \frac{2a}{s} \right) + \eta_1 + 2i \eta_2 \frac{k}{s} \right], \\ c_2 &= \left[ p \left( \frac{2a}{s} \right) - 2i \eta_2 \right] \left[ \zeta \left( \frac{2a}{s} \right) + 2i \eta_2 \frac{a}{s} \right] \left[ -\zeta \left( \frac{2a}{s} \right) + \eta_1 + 2i \eta_2 \frac{k}{s} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} p^2 \left( \frac{2a}{s} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{2\pi a}{s}, \\ d_1 &= -2\pi \left[ \zeta \left( \frac{2a}{s} \right) + 2i \eta_2 \frac{a}{s} \right], \\ d_2 &= -2\pi \left[ p \left( \frac{2a}{s} \right) - 2i \eta_2 \right]^2 \left[ \zeta \left( \frac{2a}{s} \right) + 2i \eta_2 \frac{a}{s} \right] + \pi p' \left( \frac{2a}{s} \right) p \left( \frac{2a}{s} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

so daß die in 1.1 gestellte Aufgabe gelöst ist.

## 2. Der Durchgriff der zylindrischen Dreipolröhre (mit Stabgitter)

### 2.1 Die Problemstellung

Es liege nun ein zylindrisches System mit einem Stabgitter von  $N$  Drähten (vom Durchmesser  $2\varrho$ ) vor. Nach Figur 2 ist der Ausgangsbereich, der von der Kathode  $K$ , der Anode  $A$  und den  $N$  Gitterkreisen begrenzt wird, jetzt endlich. Die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen sind aus Figur 2 ersichtlich.

Die Betrachtung der bisher für das vorliegende Elektrodensystem abgeleiteten Durchgriffsformeln läßt erkennen, daß allgemein für den Durchgriff  $D$  ein Ausdruck von der Form

$$D = \frac{-\ln \frac{\varrho}{r_g} + \Phi^* \left( \frac{r_a}{r_g}, \frac{r_k}{r_g}, \frac{\varrho^2}{r_g^2} \right)}{\Psi^* \left( \frac{r_a}{r_g}, \frac{r_k}{r_g}, \frac{\varrho^2}{r_g^2} \right)} \quad (15)$$

gelten wird. Die Funktionen  $\Phi^*$ ,  $\Psi^*$  sollen auch hier wieder als Reihen in der



Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \Phi^* \left( \frac{r_a}{r_g}, \frac{r_k}{r_g}, \frac{\varrho^2}{r_g^2} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2m}, \\ \Psi^* \left( \frac{r_a}{r_g}, \frac{r_k}{r_g}, \frac{\varrho^2}{r_g^2} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m^* \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2m} \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

dargestellt werden, wo die Koeffizienten  $c_m^*$ ,  $d_m^*$  nur von  $r_a/r_g$ ,  $r_k/r_g$  (und selbstverständlich von  $N$ ) abhängen.

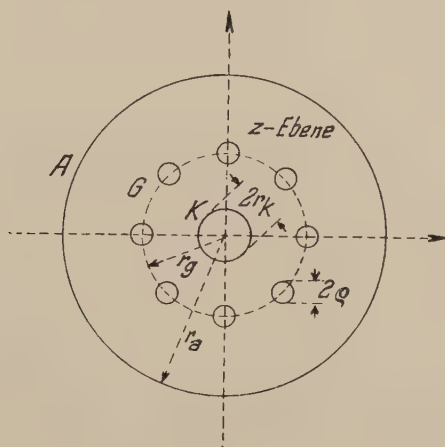


Fig. 2

## 2.2 Das komplexe Näherungspotential

Da im folgenden ähnliche Überlegungen wie beim ebenen System durchgeführt werden, ist zum Teil eine kürzere Fassung möglich, wobei auch noch ein Teil der alten Bezeichnungen verwendet wird.

Das komplexe Näherungspotential  $w(z)$  habe für  $z = r_g$  (Figur 2) mit reellen Werten  $p_r$  den Hauptteil

$$-\frac{\varrho}{2\pi\epsilon_0} \log(z - r_g) + \sum_{r=1}^n \frac{p_r}{(z - r_g)^r}. \quad (16)$$

Durch

$$u = \text{Log} \frac{z}{r_g},$$

wo das Symbol Log den Hauptwert des komplexen Logarithmus bedeuten soll, werde nun  $w(z)$  in eine  $u$ -Ebene verpflanzt. Gesucht ist zuerst der Hauptteil von  $\Psi(u) = w(r_g e^u)$  für  $u = 0$ .

Nun ist

$$\frac{p_r}{(z - r_g)^r} = \frac{p_r}{r_g^r (e^u - 1)^r} = \frac{p_r}{r_g^r u^r} (A_{r0} + A_{r1} u + \dots),$$

wo sich die Koeffizienten  $A_{r0}, A_{r1}, \dots$  leicht angeben lassen. Einem Multipol ( $r$ -ter Ordnung) mit dem Potential

$$\frac{p_r}{(z - r_g)^r}$$

entsprechen also in der  $u$ -Ebene  $r$  Multipole mit dem Potential

$$\frac{p_r}{r_g^r} \left( \frac{A_{r0}}{u^r} + \frac{A_{r1}}{u^{r-1}} + \dots + \frac{A_{r, r-1}}{u} \right).$$

Der Hauptteil von  $\Psi(u)$  für  $u = 0$  lautet dann

$$- \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log u + \sum_{r=1}^n \frac{M_r}{u^r}, \quad (17)$$

wo

$$M_r = A_{r0} \frac{p_r}{r_g^r} + A_{r-1,1} \frac{p_{r+1}}{r_g^{r+1}} + \dots + A_{n, n-r} \frac{p_n}{r_g^n} = \sum_{s=r}^n A_{s, s-r} \frac{p_s}{r_g^s} \\ (r = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Entsprechend (4) hat daher der Hauptteil von  $\Psi(u)$  für  $u = 2 \ln r_a/r_g$  (den Bildpunkt von  $z = r_a^2/r_g$ ) die Gestalt

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log \left( u - 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r M_r}{\left( u - 2 \ln (r_a/r_g) \right)^r}. \quad (17a)$$

Aus (17) und (17a) folgt wieder mit reellem  $H$

$$\Psi(u) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\sigma[u - 2 \ln (r_a/r_g)]}{\sigma(u)} + \sum_{r=1}^n \left( \frac{M_r}{(r-1)!} \left[ \zeta^{(r-1)} \left( u - 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - (-1)^r \zeta^{(r-1)}(u) \right] + H u \right), \quad (18)$$

wo die Perioden die Werte

$$\omega_1 = 2 \ln \frac{r_a}{r_k}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi i}{N}$$

haben.

Durch die entsprechende Rechnung wie oben ergibt sich hier für  $H$  der Wert

$$H = - \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} + \left( \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g} - 2M_1 \right) \frac{\eta_2}{\omega_2},$$

wo jetzt  $Q_k$  die Gesamtladung der Kathode ist. Damit erhält man mit Hilfe

von (18) für das komplexe Näherungspotential in der  $z$ -Ebene den Ausdruck

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\sigma[\text{Log}(z r_g/r_a^2)]}{\sigma[\text{Log}(z/r_g)]} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=r}^n \frac{A_{s,s-r}}{(r-1)!} \left[ \zeta^{(r-1)}\left(\text{Log} \frac{z r_g}{r_a^2}\right) - (-1)^r \zeta^{(r-1)}\left(\text{Log} \frac{z}{r_g}\right) \right] \frac{p_s}{r_g^s} + \left[ -\frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} + \left( \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g} - 2 \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r} \right) \frac{\eta_2}{\omega_2} \right] \text{Log} \frac{z}{r_g}. \quad (19)$$

Um nun die  $p_r$  in der gleichen Weise wie beim ebenen System zu bestimmen, muß man die Fourier-Entwicklung des Realteils von  $w(z)$  für den Gitterkreis  $z = r_g + \rho e^{i\varphi}$  bilden.

Nun gilt für  $z = r_g$

$$\text{Log} \frac{z}{r_g} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left( \frac{z - r_g}{r_g} \right)^m$$

und

$$\left. \begin{aligned} \log \sigma\left(\text{Log} \frac{z}{r_g}\right) &= \log \frac{z - r_g}{r_g} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left( \frac{z - r_g}{r_g} \right)^m, \\ \log \sigma\left(\text{Log} \frac{z r_g}{r_a^2}\right) &= \log(-1) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left( \frac{z - r_g}{r_g} \right)^m, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wo sich die reellen Werte  $a_m$ ,  $b_m$  leicht berechnen lassen. So ist

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{5}{24}, \quad a_3 = -\frac{1}{8} \quad \text{usw.}$$

und

$$\begin{aligned} b_0 &= \ln \sigma\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right), \\ b_1 &= -\zeta\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right), \\ b_2 &= \frac{1}{2} \left[ \zeta\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right) - p\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right) \right], \\ b_3 &= \frac{1}{6} \left[ p'\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right) + 3 p\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right) - 2 \zeta\left(2 \ln \frac{r_a}{r_g}\right) \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

Durch fortgesetztes Differenzieren der Reihen (20) [nach  $(z - r_g)/r_g$ ] erhält man

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{(r-1)}\left(\text{Log} \frac{z}{r_g}\right) &= \sum_{j=1}^r \frac{s_{rj}}{(z - r_g)^j} + \sum_{m=0}^{\infty} t_{rm} \left( \frac{z - r_g}{r_g} \right)^m, \\ \zeta^{(r-1)}\left(\text{Log} \frac{z r_g}{r_a^2}\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_{rm} \left( \frac{z - r_g}{r_g} \right)^m, \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

wo die  $s_{rj}$  für das Weitere ohne Bedeutung sind und die Koeffizienten  $t_{rm}$ ,  $u_{rm}$  einfach berechnet werden können.

Mit Hilfe der angegebenen Reihen ergibt sich nun aus (19) für das komplexe Näherungspotential die gesuchte Entwicklung

$$\begin{aligned} w(z) = & -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{z-r_g}{r_g} + \sum_{r=1}^n \frac{p_r}{(z-r_g)^r} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^n \sum_{s=r}^n \frac{A_{s,s-r}}{(r-1)!} [u_{rm} - (-1)^r t_{rm}] \frac{p_s}{r_g^s} \left( \frac{z-r_g}{r_g} \right)^m \\ & - \left[ -\frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} + \left( \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g} - 2 \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r} \right) \frac{\eta_2}{\omega_2} \right] \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left( \frac{z-r_g}{r_g} \right)^m + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - a_m) \left( \frac{z-r_g}{r_g} \right)^m, \end{aligned}$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß wegen des Ansatzes (16)

$$-\sum_{r=1}^n \sum_{s=r}^n \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^r s_{rj} A_{s,s-r}}{(r-1)!} \cdot \frac{p_s}{r_g^s (z-r_g)^j} = \sum_{r=1}^n \frac{p_r}{(z-r_g)^r}$$

sein muß. Bildet man nun den Realteil dieser Reihenentwicklung für  $z = r_g + \varrho e^{i\varphi}$ , so erhält man wieder eine Fourier-Reihe von der Gestalt (9a) mit dem Potentialmittelwert

$$\left. \begin{aligned} V_g = & \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \sigma \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - \ln \frac{\varrho}{r_g} \right] \\ & + \sum_{r=1}^n \sum_{s=r}^n \frac{A_{s,s-r}}{(r-1)!} [u_{r0} - (-1)^r t_{r0}] \frac{p_s}{r_g^s} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

und den  $n$  ersten Koeffizienten (die übrigen sind für das Folgende unwesentlich)

$$\left. \begin{aligned} A_m = & \frac{p_m}{\varrho^m} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} (b_m - a_m) \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^m \\ & + \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=r}^n \frac{A_{s,s-r}}{(r-1)!} [u_{rm} - (-1)^r t_{rm}] \frac{p_s}{r_g^s} \\ & \left[ -\frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} + \left( \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g} - 2 \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r} \right) \frac{\eta_2}{\omega_2} \right] \frac{(-1)^m}{m} \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^m, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$(m = 1, 2, \dots, n).$

Durch die  $n$  Gleichungen  $A_m = 0$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) sind dann die  $n$  Größen  $p_r$  bestimmt.

### 2.3 Die Elektrodenpotentiale der Zylinderröhre

Für das Kathoden- und Anodenpotential liefert (19)

$$V_k = \operatorname{Re}[w(r_k)] = \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_g}{r_k} - \left( \eta_1 + \frac{2\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_k}{r_g} \right) \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r} \\ + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g} \left( \eta_1 + \frac{2\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_k}{r_g} \right), \\ V_a = \operatorname{Re}[w(r_a)] = \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g} - \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r} \right) \frac{2\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_a}{r_g} - \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_g}.$$

Daher erhält man mit Hilfe von (21) für die Gitter- und Anodenspannung

$$U_g = V_g - V_k = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \sigma \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - \ln \frac{Q}{r_g} - \ln \frac{r_a}{r_g} \left( \eta_1 + \frac{2\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_k}{r_g} \right) \right] \\ + \sum_{r=1}^n \sum_{s=r}^n \frac{A_{s,s-r}}{(r-1)!} [u_{r0} - (-1)^r t_{r0}] \frac{p_s}{r_g^s} \\ + \left( \eta_1 + \frac{2\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_k}{r_g} \right) \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r} + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_k}{r_g}, \\ U_a = V_a - V_k = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} N \ln \frac{r_a}{r_g} - \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_k} + N \sum_{r=1}^n A_{r,r-1} \frac{p_r}{r_g^r}, \quad (23)$$

wobei zur Vereinfachung der letzten Beziehung wiederum von der Legendreschen Relation Gebrauch gemacht wurde.

### 2.4 Das unendliche Gleichungssystem im zylindrischen Fall

Für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich aus (22) für die zum exakten Potential gehörigen  $p_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) das unendliche System

$$\frac{p_m}{r_g^m} + \left( \frac{Q}{r_g} \right)^{2m} \sum_{r=1}^{\infty} K_{mr} \frac{p_r}{r_g^r} = \left( \frac{Q}{r_g} \right)^{2m} \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} F_{m0} + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} G_{m0} \right), \quad (24)$$

wo zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} F_{m0} &= a_m - b_m + 2 \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_a}{r_g}, \\ G_{m0} &= - \frac{(-1)^m}{m}, \\ K_{mr} &= 2 \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{\eta_2}{\omega_2} A_{r,r-1} + \sum_{j=1}^r \frac{A_{r,r-j}}{(j-1)!} [u_{jm} - (-1)^j t_{jm}] \end{aligned} \right\} (m, r = 1, 2, \dots)$$



gesetzt ist. Die Gleichungen (24) werden gelöst durch

$$p_m = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{r=0}^{\infty} F_{mr} \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2m+2r} + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \sum_{r=0}^{\infty} G_{mr} \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2m+2r}, \quad (25)$$

wo sich die Koeffizienten mit Hilfe der einfachen Rekursionsformeln

$$\left. \begin{aligned} F_{mr} &= -K_{m1} F_{1,r-1} - K_{m2} F_{2,r-2} - \dots - K_{mr} F_{r0}, \\ G_{mr} &= -K_{m1} G_{1,r-1} - K_{m2} G_{2,r-2} - \dots - K_{mr} G_{r0}, \end{aligned} \right\} (m, r = 1, 2, \dots)$$

angeben lassen. Völlig entsprechend den Überlegungen in 1.4 gilt also auch hier für die Koeffizienten  $F_{mr}$  (und ganz ähnlich für die  $G_{mr}$ )

$$\begin{aligned} F_{m1} &= -K_{m1} F_{10}, \\ F_{m2} &= K_{m1} K_{11} F_{10} - K_{m2} F_{20}, \\ F_{m3} &= (K_{m2} K_{21} - K_{m1} K_{11}^2) F_{10} + K_{m1} K_{12} F_{20} - K_{m3} F_{30}, \\ &\dots \end{aligned}$$

so daß die Reihe (25) als bekannt anzusehen ist.

## 2.5 Die Durchgriffsberechnung für die Zylinderröhre

Mit (23) und (25) erhält man als genaue Werte für die Gitter- und Anodenspannung

$$\left. \begin{aligned} U_g &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[ -\ln \frac{\varrho}{r_g} + \ln \sigma \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - \left( \eta_1 + \frac{2\eta_2}{\omega_2} \ln \frac{r_k}{r_g} \right) \ln \frac{r_a}{r_g} \right] \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} F_r \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2r} + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{r_k}{r_g} + \sum_{r=1}^{\infty} G_r \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2r} \right], \\ U_a &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[ -N \ln \frac{r_a}{r_g} + N \sum_{r=1}^{\infty} F'_r \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2r} \right] \\ &\quad + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{r_k}{r_a} + N \sum_{r=1}^{\infty} G'_r \left( \frac{\varrho}{r_g} \right)^{2r} \right], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

wo

$$\begin{aligned} F'_r &= K_1 F_{1,r-1} + K_2 F_{2,r-2} + \dots + K_r F_{r0}, \\ G'_r &= K_1 G_{1,r-1} + K_2 G_{2,r-2} + \dots + K_r G_{r0}, \\ F'_r &= A_{10} F_{1,r-1} + A_{21} F_{2,r-2} + \dots + A_{r,r-1} F_{r0}, \\ G'_r &= A_{10} G_{1,r-1} + A_{21} G_{2,r-2} + \dots + A_{r,r-1} G_{r0} \end{aligned}$$

und

$$K_r = \left( \eta_1 + \frac{2}{\omega_2} \eta_2 \ln \frac{r_k}{r_g} \right) A_{r,r-1} + \sum_{j=1}^r \frac{u_{j0} - (-1)^j t_{j0}}{(j-1)!} A_{r,r-j}$$

ist.

Aus den beiden Gleichungen (26) ergeben sich jetzt leicht die Röhrenkapazitäten<sup>1)</sup> und der elektrostatische Durchgriff

$$D_{Zyl} = \frac{1}{N} \cdot \frac{-\ln \frac{Q}{r_g} + \ln \sigma \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - \left( \eta_1 + \frac{2}{\omega_2} \eta_2 \ln \frac{r_k}{r_g} \right) \ln \frac{r_a}{r_g} + \sum_{r=1}^{\infty} F_r \left( \frac{Q}{r_g} \right)^{2r}}{\ln \frac{r_a}{r_g} - \sum_{r=1}^{\infty} F'_r \left( \frac{Q}{r_g} \right)^{2r}} \tag{26a}$$

Die Reihen (15a) sind daher als bekannt anzusehen; so ist

$$\begin{aligned} c_0^* &= \ln \sigma \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) - \left( \eta_1 + \frac{2}{\omega_2} \eta_2 \ln \frac{r_k}{r_g} \right) \ln \frac{r_a}{r_g}, \\ c_1^* &= F_1 - K_1 F_{10} = \left[ \frac{1}{2} + \eta_1 + \frac{2}{\omega_2} \eta_2 \ln \frac{r_k}{r_g} - \zeta \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) \right] \\ &\quad \times \left[ -\frac{1}{2} - \frac{2}{\omega_2} \eta_2 \ln \frac{r_a}{r_g} + \zeta \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) \right] \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_0^* &= N \ln \frac{r_a}{r_g}, \\ d_1^* &= -N F'_1 = -N A_{10} F_{10} = N \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\omega_2} \eta_2 \ln \frac{r_a}{r_g} - \zeta \left( 2 \ln \frac{r_a}{r_g} \right) \right] \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

so daß die in 2.1 gestellte Aufgabe gelöst ist.

**3. Der Zusammenhang der allgemeinen Formeln mit den bisher bekannten**

Die bekannten «klassischen» Durchgriffsformeln (W. SCHOTTKY, M. VON LAUE, M. ABRAHAM und andere), die im wesentlichen die Gestalt

$$D_{Pl}^* = \frac{s}{2 \pi a} \ln \frac{s}{2 \pi Q} \tag{27}$$

<sup>1)</sup> Der Betrag der Koeffizientendeterminante nähert sich für  $Q/r_g \rightarrow 0$  dem Wert

$$-\ln \frac{r_a}{r_k} \ln \frac{Q}{r_g}.$$

für die Plattenröhre bzw.

$$D_{Zyl}^* = \frac{1}{N} \cdot \frac{-\ln(N\varrho/r_g)}{\ln(r_a/r_g)} \quad (28)$$

für die Zylinderröhre haben, lassen den Zusammenhang mit (14a) bzw. (26a) erkennen. Um klar zu erkennen, in welcher Weise die hier angegebenen allgemeinen Formeln in die genannten Näherungsausdrücke übergehen, soll (im Hinblick auf den Grenzübergang  $\omega_1 \rightarrow \infty$ ) von den Beziehungen

$$\log \sigma(z) = \log \left( \frac{\omega_2}{\pi} e^{z^2 \pi^2 / (6 \omega_1^2)} \sin \frac{\pi z}{\omega_2} \right) + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right), \quad \frac{\eta_2}{\omega_2} = \frac{\pi^2}{3 \omega_2^2} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right) \quad (29)$$

Gebrauch gemacht werden; diese ergeben sich leicht aus der bekannten Produktdarstellung für die  $\sigma$ -Funktion. Mit Hilfe von (29) erhält man im Falle der Plattenröhre

$$\begin{aligned} \ln \sigma\left(\frac{2a}{s}\right) &= -\ln 2\pi - \frac{2a^2 \pi^2}{3s^2} + \frac{2\pi a}{s} + \ln(1 - e^{-(4\pi a/s)}) + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right), \\ &\quad -\frac{a}{s} \left( \eta_1 + 2i\eta_2 \frac{k}{s} \right) = \frac{2a^2 \pi^2}{3s^2} - \frac{2\pi a}{s} + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right) \end{aligned}$$

und daher nach (14a) für den Durchgriff

$$D_{Pl} = \frac{\ln \frac{s}{2\pi\varrho} + \ln(1 - e^{-(4\pi a/s)}) + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right) + O\left(\frac{\varrho^2}{s^2}\right)}{\frac{2\pi a}{s} + O\left(\frac{\varrho^2}{s^2}\right)}.$$

Die entsprechende Rechnung liefert für die Zylinderröhre den Ausdruck

$$D_{Zyl} = \frac{1}{N} \cdot \frac{-\ln \frac{N\varrho}{r_g} + \ln \left[ 1 - \left( \frac{r_g}{r_a} \right)^{2N} \right] + O\left(\frac{1}{\omega_1}\right) + O\left(\frac{\varrho^2}{r_g^2}\right)}{\ln \frac{r_a}{r_g} + O\left(\frac{\varrho^2}{r_g^2}\right)},$$

und es ist nun deutlich zu erkennen, unter welchen weiteren Annahmen die beiden letzten Ausdrücke in (27) bzw. (28) übergehen. Obwohl für diese Näherungsformeln, die ursprünglich im wesentlichen in der angegebenen Gestalt abgeleitet wurden, in den letzten Jahrzehnten einfache Korrekturglieder berechnet wurden (F. OLLENDORF, L. OERTEL und andere), zeigen alle diese Formeln durch den Vergleich mit den genauen Darstellungen (14a) und (26a), daß bisher nicht einmal die (in den Zählern vorkommenden) absoluten (das heißt von  $\varrho/s$  bzw.  $\varrho/r_g$  freien) Glieder exakt erfaßt worden sind.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. BARKHAUSEN, *Elektronenröhren*, 1. Bd., 5. Aufl. (S. Hirzel, Leipzig 1945), S. 94 ff.
- [2] H. G. MÖLLER, *Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik*, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1945), S. 86 ff.
- [3] I. RUNGE, *Die Berechnung des Durchgriffs auf Grund der Potentialverteilung, Telefunkenröhre*, H. 21/22, 229 (1941).
- [4] M. LAGALLY, *Die reibungslose Strömung im Außengebiet zweier Kreise*, Z. angew. Math. Mech. 9, 299 (1929).
- [5] H. WALTER, *Über die Berechnung elektrostatischer Potentiale von Kreis- und Kugelkonduktoren, insbesondere von unendlichen Kreis- und Kugelgittern*, Dissertation (Marburg 1927).
- [6] J. F. BÖTTCHER, *Die maximale Feldstärke und die Kapazität der Drehstromkabel*, Z. angew. Math. Mech. 14, 295 (1934).
- [7] F. SOMMER, *Die Berechnung der Kapazitäten bei Kabeln mit einfachem Querschnitt*, Elektr. Nachr.-Techn. 17, 281 (1940).
- [8] R. BECKER, *Theorie der Elektrizität*, 1. Bd., 12. und 13. Aufl. (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1944), S. 65.
- [9] A. HURWITZ und R. COURANT, *Funktionentheorie* (Springer, Berlin 1922), S. 132 ff.
- [10] H. BURKHARDT, *Elliptische Funktionen* (W. de Gruyter, Leipzig 1899), S. 149 ff.
- [11] M. LANDSBERG, *Ein Minimalproblem als Grundlage für die Berechnung von Kabelkapazitäten*, Z. angew. Math. Mech. 28, 143—152 (1948).

Weitere Literaturangaben zum hier behandelten Problem findet man in der oben zitierten Arbeit von I. RUNGE [3].

## Summary

Formulas are given for the reciprocal of the electrostatic amplification factor of a vacuum tube with plane or cylindrical electrodes. Whilst the formulas deduced by W. SCHOTTKY, M. ABRAHAM, F. OLLENDORF, L. OERTEL and others made special assumptions with regard to the grid-cathode distance, thickness of the grid wires, etc., no assumptions are made in this paper except that the potential distribution is considered to be two-dimensional. Full use is made of the Weierstrass functions; thus the calculation leads to a infinite system of linear equations, which can be solved with the aid of certain power series. It is shown, how the formulas, which are deduced in this paper, and the approximations hitherto known are related to one another.

A further short paper will point out, how the relations, deduced in the present paper, can be evaluated numerically, and an appendix will give exact proofs for the operations, performed with the above mentioned infinite system of linear equations.

(Eingegangen: 22. 5. 1950.)

# Der Adiabatenkoeffizient dissoziierender Feuergase bei adiabatisch-isentropischer Entspannung

VON GERHARD KLOBE, Paris

Unter Annahme der idealen Gasgesetze gilt für eine dissoziierende Gas-  
mischung

$$P V = \Sigma n R T. \quad (1)$$

Das Symbol  $R$  bezeichnet die Gaskonstante (gültig für ein Mol). Ferner ist  $\Sigma n$  = Summe der Einzelmolzahlen als Funktion von  $T$  und  $P$  durch vorhergehende Rechnung bekannt. Somit ist auch das Volumen als Funktion von  $T$  und  $P$  bekannt.

$$V = \frac{\Sigma n R T}{P}. \quad (2)$$

Für die praktische Auswertung schreiben wir die Summenmolzahl  $\Sigma n$  als Produkt einer Größe  $\Sigma n^0$  (= Summenmolzahl ohne Dissoziation, Grenzwert für tiefe Temperaturen) und einem Molzahlkoeffizienten

$$\Sigma n = \gamma \Sigma n^0. \quad (3)$$

Somit gilt an Stelle von (2)

$$V = \gamma \frac{\Sigma n^0 R T}{P}. \quad (4)$$

Bei der Differentiation ist jedoch jeweils zu beachten, daß  $\gamma$  eine Funktion von  $T$  und  $P$  ist.

Für die Entropie als Funktion von  $T$  und  $P$  kann ferner geschrieben werden:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial P} dP. \quad (5)$$

Aus (5) folgt unmittelbar für  $dS = 0$

$$\left( \frac{dT}{dP} \right)_S = \frac{(\partial S / \partial P)_T}{(\partial S / \partial T)_P}. \quad (6)$$

Für praktische Anwendungen ist der Übergang zu logarithmischer Darstellung zu empfehlen

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = - \frac{(\partial S / \partial \ln P)_T}{T (\partial S / \partial T)_P}. \quad (7)$$

Unter Benutzung von

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial H}{\partial T} \quad (8)$$



und

$$\frac{\partial S}{\partial P} = -\frac{1}{P} \left( \gamma \Sigma n^0 R - \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial H}{\partial \ln P} \right) \quad (9)$$

und Einsetzung von (8) und (9) in (7) folgt

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = \frac{\gamma \Sigma n^0 R - (1/T) (\partial H / \partial \ln P)}{\partial H / \partial T} \quad (10)$$

oder gleichwertig unter Einsetzen von (8) und Benutzung von (11)

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = -\frac{V}{T} \cdot \frac{\partial \ln V}{\partial \ln T} = -\gamma \frac{\Sigma n^0 R}{T} \left( 1 + T \frac{\partial \ln \gamma}{\partial T} \right) \quad (11)$$

in (10)

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = \frac{\Sigma n^0 R [\gamma + T (\partial \gamma / \partial T)]}{\partial H / \partial T}. \quad (12)$$

Für nichtdissoziierende Gase wird  $\gamma = 1$ ;  $\partial H / \partial T = C_p \Sigma n^0$  und  $C_p - C_v = R$ , wobei  $C_p$  und  $C_v$  die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen für 1 Mol Gasmischung bedeuten. Unter Einführung von  $\kappa = C_p / C_v$  ergibt sich dann die bekannte Formel

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad \text{Gas ohne Dissoziation.} \quad (13)$$

In Bereichen ohne wesentliche Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen bzw. von  $\kappa$  folgt alsdann durch Integration zwischen den Anfangswerten  $P_i$  und  $T_i$  und den Endwerten  $P_a$  und  $T_a$

$$\frac{T_a}{T_i} = \left( \frac{P_a}{P_i} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \quad \text{Gas ohne Dissoziation.} \quad (14)$$

Vorstehende Darstellung kann auch auf dissoziierende Feuergase übertragen werden, wenn der sogenannte  $(P, T)$ -Adiabatenkoeffizient  $h$  mit der Definition

$$h = \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S \quad (15)$$

und mit den praktischen Bestimmungsgleichungen (7), (10) und (12) nicht allzu stark veränderlich ist. Dann ergibt sich durch Integration von (15)

$$\frac{T_a}{T_i} = \left( \frac{P_a}{P_i} \right)^h. \quad (16)$$

Für nichtdissoziierende Feuergase gilt die Gleichung (13) sowie  $\gamma = 1$ , und hiermit folgt weiter

$$\left( \frac{d \ln V}{d \ln P} \right)_S = -\frac{1}{\kappa} \quad \text{Gas ohne Dissoziation.} \quad (17)$$

In Bereichen ohne wesentliche Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen bzw. von  $\kappa$  folgt alsdann durch Integration zwischen den Anfangswerten  $P_i$  und  $V_i$  und den Endwerten  $P_a$  und  $V_a$

$$\frac{P_a}{P_i} = \left( \frac{V_i}{V_a} \right)^\kappa \quad \text{Gas ohne Dissoziation.} \quad (18)$$

Vorstehende Darstellung kann auf dissoziierende Gase übertragen werden, wenn der sogenannte  $(P, V)$ -Adiabateneponent  $k$  mit der Definition

$$k = \left| \left( \frac{d \ln P}{d \ln V} \right)_S \right| \quad (19)$$

und mit der praktischen Bestimmungsgleichung

$$\left( \frac{d \ln V}{d \ln P} \right)_S = \left( 1 + \frac{T}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right) - 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \ln P} \quad (20)$$

nicht allzu stark veränderlich ist. Dann ergibt sich durch Integration

$$\frac{P_a}{P_i} = \left( \frac{V_i}{V_a} \right)^k \quad (21)$$

oder

$$\frac{V_a}{V_i} = \left( \frac{P_i}{P_a} \right)^{1/k} \quad (22)$$

Aus berechneten Zahlenwerten ist ersichtlich, daß diese für verschiedene Werte von Druck und Temperatur nicht konstant sind, da bei höheren Temperaturen um 3000° K (und besonders bei kleinen Drucken) infolge zunehmender Dissoziation die Wärmekapazität  $\partial H / \partial T$  relativ hoch wird, und da gleichzeitig der Wärmehalt  $H$  druckabhängig wird und der Molzahlkoeffizient  $\gamma$  sich mit  $T$  und  $P$  ändert. Teilweise wird das Anwachsen der Wärmekapazität im Nenner der rechten Seite der Gleichungen (10), (12) und (20) für  $(d \ln T / d \ln P)_S$  und  $(d \ln V / d \ln P)_S$  kompensiert durch ein entsprechendes Anwachsen der Glieder im Zähler für den Bereich der höheren Temperaturen. Diese Bemerkung ist als Warnung wichtig.

Speziell der  $(P, V)$ -Adiabateneffizient darf nicht einfach als  $\kappa = C_p / C_v$  definiert werden. Falls  $\kappa$  bekannt ist, kann zwar der  $(P, V)$ -Adiabateneponent  $k$  in folgender Weise berechnet werden

$$k = \left| \left( \frac{d \ln P}{d \ln V} \right)_S \right| = \kappa \left| \left( \frac{d \ln P}{d \ln V} \right)_T \right|. \quad (23)$$

Vorstehende Berechnungsmöglichkeit bietet jedoch keinen Vorteil, da nicht  $C_p - C_v = R$  gesetzt werden kann. Für die zahlenmäßige Berechnung von  $k$  ist vielmehr (19) in Verbindung mit (20) zu benutzen.

Die relative Molzahlerhöhung infolge Dissoziation beträgt  $\gamma - 1$ . Sie ergibt sich aus folgender, hier nicht abgeleiteter Gleichung als Funktion des Druckes und der Temperatur

$$\gamma_{(T, P)} - 1 = \left( \frac{P^*}{P} \right)^\nu [(\gamma_{(T^*, P^*)} - 1) \tau]. \quad (24)$$

Für eine bestimmte Rechentemperatur  $T^*$  und einen Rechendruck  $P^*$  ist somit  $\gamma_{(T^*, P^*)}$  bekannt. Damit läßt sich aus Gleichung (24) für jeden beliebigen Druck und Temperatur der Molzahlkoeffizient leicht bestimmen.

In Gleichung (24) bedeuten noch

$\Theta = Q/R$  °K eine Temperaturfunktion,

$\tau = \exp \left[ -\Theta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T^*} \right) \right]$  eine Exponentialfunktion,

$\nu$  = einen Koeffizienten für die Druckabhängigkeit.

Für  $\Theta$  gilt im Bereich der üblichen Feuergase

- |                                    |   |                                    |
|------------------------------------|---|------------------------------------|
| a) bei Sauerstoffüberschuß         | } | $\Theta = 20\,000^\circ \text{ K}$ |
| b) bei stöchiometrischen Gemischen |   |                                    |
| c) bei Brennstoffüberschuß         |   | $\Theta = 26\,000^\circ \text{ K}$ |

und für  $\nu$

- |                                    |                |
|------------------------------------|----------------|
| a) bei Sauerstoffüberschuß         | $\nu = 0,38$   |
| b) bei stöchiometrischen Gemischen | $\nu = 0,333,$ |
| c) bei Brennstoffüberschuß         | $\nu = 0,50.$  |

Setzt man nun weiterhin

$$C_p - C_v = \Sigma n^0 \gamma_{(T^*, P^*)} R \quad (25)$$

und

$$C_p = \frac{\Delta H_u}{T_i - T_0}, \quad (26)$$

wobei

- $\Delta H_u$  = Ausgangsenthalpie in cal,  
 $T_i$  = Ausgangstemperatur in °K,  
 $T_0$  = Nullpunktstemperatur in °K

bedeutet, so kann man bei bekannten Werten von  $\gamma_{(T^*, P^*)}$   $k$  leicht berechnen. In den folgenden Tabellen 1 und 2 sind  $\gamma_{(T^*, P^*)}$  und die Funktion  $\tau$  dargestellt, wobei  $\gamma_{(T^*, P^*)}$  auf einen Rechendruck von  $P^* = 16$  ata,  $T^* = 3000^\circ \text{ K}$  und  $\tau$  auf eine Rechentemperatur von  $T^* = 3000^\circ \text{ K}$  bezogen ist.

Für nachstehenden Zweck ist die Bruttozusammensetzung des Feuergases mit 1 g Atom Kohlenstoff,  $A$  g Atome Wasserstoff,  $B$  g Atome Sauerstoff,  $C$  g Atome Stickstoff und  $D$  g Atome Schwefel gegeben.

Tabelle 1  
 Prozentuale Molzahlerhöhung  $\gamma'(T^*, P^*)$  durch Dissoziation als Funktion von  $A$  und  $B$   
 bei  $T^* = 3000^\circ \text{K}$  und  $P^* = 16 \text{ ata}$

$A$	$B$	$\gamma'(T^*, P^*)$	$A$	$B$	$\gamma'(T^*, P^*)$	$A$	$B$	$\gamma'(T^*, P^*)$	$A$	$B$	$\gamma'(T^*, P^*)$
1,0	1,50	1,0154		1,60	1,0190		2,10	1,0215		2,00	1,0190
	1,90	1,0255		1,80	1,0199		2,30	1,0228		2,50	1,0218
	2,10	1,0415		2,00	1,0215		2,50	1,0254		3,00	1,0288
	2,20	1,0551		2,30	1,0281		2,90	1,0382		3,40	1,0416
	2,30	1,0715		2,60	1,0465		3,10	1,0504		3,60	1,0259
	2,50 <sup>1)</sup>	1,1140		2,70	1,0576		3,20	1,0591		3,70	1,0610
	2,60	1,1055		2,80	1,0709		3,30	1,0710		3,80	1,0715
	2,90	1,0859		3,00 <sup>1)</sup>	1,1049		3,50 <sup>1)</sup>	1,1015		4,00 <sup>1)</sup>	1,1000
	3,10	1,0771		3,10	1,0968	3,0	3,60	1,0950	4,0	4,40	1,0815
	3,30	1,0710		3,30	1,0865		3,80	1,0855		4,80	1,0730
	3,60	1,0650		3,40	1,0830		3,90	1,0820		5,10	1,0689
	4,00	1,0600		3,80	1,0729		4,30	1,0730		5,50	1,0650
	4,50	1,0555		4,10	1,0677		4,60	1,0690		6,00	1,0620
	5,00	1,0520		4,50	1,0632		5,00	1,0650		6,50	1,0595
										7,00	1,0600

1) Stöchiometrisches Verhältnis.

Tabelle 2

Hilfsfunktion  $\tau = \exp \left[ -\Theta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T^*} \right) \right]$  zur Bestimmung von  $\gamma_{(T, P)}$   
für eine Rechentemperatur  $T^* = 3000^\circ \text{ K}$

$T$ $^\circ \text{K}$	$\tau$ für $\Theta = 26000^\circ \text{ K}$	$\tau$ für $\Theta = 20000^\circ \text{ K}$	$T$ $^\circ \text{K}$	$\tau$ für $\Theta = 26000^\circ \text{ K}$	$\tau$ für $\Theta = 20000^\circ \text{ K}$
1500		0,001	2600	0,264	0,358
1600		0,003	2700	0,381	0,476
1700	0,001	0,006	2750	0,455	0,546
1750	0,002	0,009	2800	0,538	0,621
1800	0,003	0,012	2900	0,742	0,795
1900	0,007	0,021	3000	1,000	1,000
2000	0,013	0,036	3100	1,320	1,239
2100	0,024	0,057	3200	1,716	1,516
2200	0,043	0,089	3250	1,945	1,667
2250	0,056	0,108	3300	2,199	1,883
2300	0,071	0,131	3400	2,773	2,190
2400	0,115	0,189	3500	3,452	2,591
2500	0,176	0,263			

Danach gilt für  $\Sigma n$  für Gemische mit einer Bruttozusammensetzung nach Tabelle 3

Tabelle 3  
 $\Sigma n$

	Das Gemisch enthält auf 1 g Atom Kohlenstoff		
Bruttozusammensetzung in g Atomen	A g Atome H B g Atome O	A g Atome H B g Atome O C g Atome N	A g Atome H B g Atome O C g Atome N D g Atome S
Stöchiometrische Gemische Brennstoffüberschuß	$\Sigma n = \gamma_{(T, P)} \left( 1 + \frac{A}{2} \right)$	$\Sigma n = \gamma_{(T, P)} \left( 1 + \frac{A}{2} \right) + \frac{C}{2}$	$\Sigma n = \gamma_{(T, P)} \left( 1 + \frac{A}{2} \right) + \frac{C}{2} + D$
Gemische mit Sauerstoffüberschuß	$\Sigma n = \gamma_{(T, P)} \left( \frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right)$	$\Sigma n = \gamma_{(T, P)} \left( \frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right) + \frac{C}{2}$	$\Sigma n = \gamma_{(T, P)} \left( \frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right) + \frac{C}{2} + D$ wobei B = Gesamt-sauerstoffzahl - 2D ist



*Beispiel:* Verbrennung eines Kohlenwasserstoffes mit flüssigem Sauerstoff im stöchiometrischen Verhältnis



Es ist

$$A = 2; \quad B = 3; \quad \Sigma n^0 = 2; \quad \text{aus Tabelle 1.}$$

$$\gamma_{(T^*, P^*)} = 1,1049; \quad \nu = 0,333; \quad \Theta = 20000^\circ \text{ K}.$$

Die Ausgangsenthalpie (Heizwert des Brennstoffes) sei

$$\Delta H_u = 155000 \text{ cal}$$

und die Verbrennungstemperatur ergebe sich unter Berücksichtigung aller möglichen Dissoziationsreaktionen bei einem Ausgangsdruck

$$P_i = 1 \text{ ata} \quad \text{zu} \quad T_i = 3100^\circ \text{ K}.$$

Aus Tabelle 2 ergibt sich für  $\tau = 1,239$  und aus Gleichung (24)

$$\gamma - 1 = \left( \frac{16}{1} \right)^{0,333} \cdot (1,1049 - 1) \cdot 1,239 = 0,327$$

bzw.

$$\gamma_{(3100^\circ \text{ K}, P_i = 1 \text{ ata})} = 1,327.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} C_p - C_v &= \gamma_{(T, P)} \Sigma n^0 R = \Sigma n R \\ &= 1,327 \cdot 2 \cdot 1,987 = 5,308, \end{aligned}$$

$$C_p = \frac{155000}{3100 - 273} = 55$$

und endlich

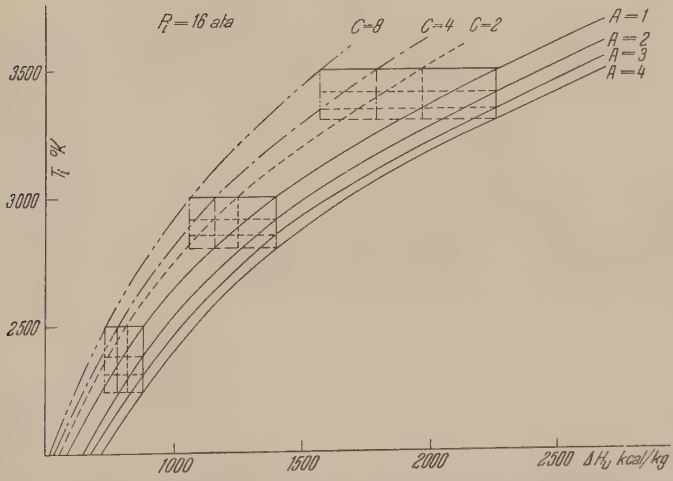
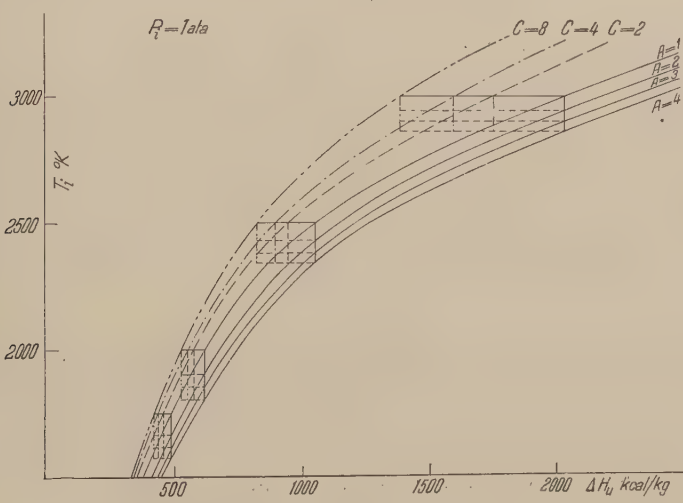
$$k = \frac{55}{55 - 5,308} \approx 1,10.$$

Für Ausströmungsvorgänge heißer Feuergase aus Lavaldüsen kann der nach obenstehender Methode berechnete Adiabatenkoeffizient  $k$  näherungsweise bis zum engsten Querschnitt hin als hinreichend genau betrachtet werden. In der Düse selbst, das heißt während des Entspannungsvorganges, ist jedoch der wiedereintretenden Rückdissoziation Rechnung zu tragen, womit jeweils ein mehr oder minder starkes Anwachsen von  $k$  verbunden ist. Näherungsweise kann in diesem Teil mit der Einfriertemperatur des Wassergasgleichgewichtes gerechnet werden, womit  $k$  zwischen 1,22 bis 1,25 zu liegen kommt.

Anhang

Es werden noch zwei Diagramme mitgeteilt, mit deren Hilfe es möglich ist, die Verbrennungstemperaturen üblicher Feuergasgemische im stöchiometrischen Verhältnis als Funktion des Heizwertes und des Druckes zu ermitteln. Es ist dabei zu beachten, daß die Verbrennungsgleichung jeweils auf 1 g Atom Kohlenstoff zu beziehen ist.

Die Diagramme gelten für die Verbrennung nichtstickstoffhaltiger oder stickstoffhaltiger Brennstoffe mit nichtstickstoffhaltigen bzw. stickstoffhalti-



Verbrennungstemperaturen von Feuergasen im stöchiometrischen Verhältnis bestehend aus 1 g Atom Kohlenstoff, A g Atom Wasserstoff, B g Atom Sauerstoff, C g Atom Stickstoff.

gen Sauerstoffträgern im Bereich stöchiometrischer Verhältnisse. Für andere Drucke als 1 bzw. 16 ata läßt sich  $T_i$  mit hinreichender Genauigkeit nach folgender Beziehung berechnen:

$$T_{i(P)} = C \log P_i$$

$$C = \frac{T_{i(P=16 \text{ ata})} - T_{i(P=1 \text{ ata})}}{1,204}.$$

### Summary

The  $(p, v)$  adiabatic coefficient can not be defined as  $C_p/C_v$  for dissociating combustion gases.

An equation is given which allows a simple determination of the  $(p, v)$  adiabatic coefficient  $k$  as a function of the pressure and the temperature for the range of the usual mixtures of combustion gases, if the coefficient for the relative increase of Mol-number due to dissociation  $\alpha(T, p)$  is known.

Furthermore two diagrams are given by means of which the combustion temperatures  $T_i$  can be determined as a function of the specific heat within the range of usual combustion gas mixtures, especially in the stoichiometric ratio.

(Eingegangen: 13. 4. 1950.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

### The Airfoil Equation for a Double Interval

By FRANCESCO G. TRICOMI, Pasadena, Calif.<sup>1)</sup>

1. In the aerodynamics of an airplane of conventional type the *airfoil equation*:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^{*b} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x), \quad (-b \leq x \leq b) \quad (1)$$

plays a fundamental role. Here the asterisk signifies CAUCHY'S *principal value* of the integral and  $2b$  is the *span* of the lifting surface (wings).

This integral equation can be solved by means of the well-known formula of SÖHNGEN

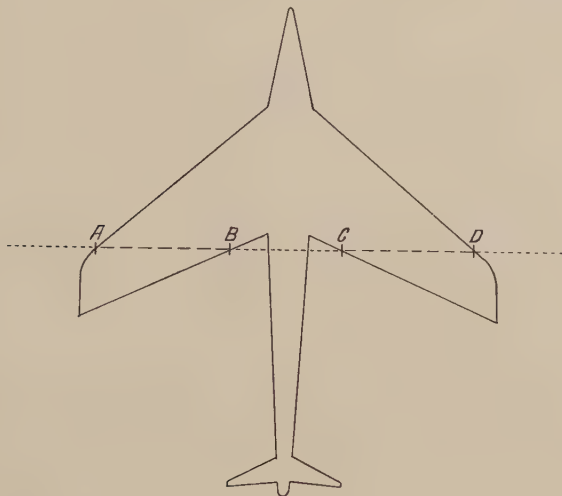
$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_b^{*b} \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2 - x^2}} \cdot \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C}{\sqrt{b^2 - x^2}}, \quad (2)$$

where  $C$  denotes an arbitrary constant, of which I gave recently a new proof free of unnecessary restrictions<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> California Institute of Technology, Research sponsored by the Office of Naval Research, U.S.A.

<sup>2)</sup> F. G. TRICOMI, *On the finite Hilbert transformation*, Quart. J. Math., Oxford [2] (1951).

In the case of modern airplanes with *swept-back wings* there is, however, an important change, because—as the figure shows—some straight lines perpendicular to the plane of symmetry of the aircraft cut the (idealized) lifting surface



ular to the plane of symmetry of the aircraft cut the (idealized) lifting surface along *two* separated segments  $AB$  and  $CD$ . Hence in such a case we have to deal also with integral equations of the form

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*k} + \int_k^{*1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x), \quad (k < |x| < 1) \quad (3)$$

where  $k$  is a positive constant less than  $1^1$ .

The purpose of this short paper is to show that this equation can be explicitly solved by means of the formula

$$\varphi(x) - g(x) - \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \sqrt{(1-y^2)(k^2-y^2)} \frac{g(y)}{y-x} dy + C_1 x + C_2 \right\} \times \left. \begin{aligned} &\times \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where  $k < |x| < 1$ ,  $C_1$  and  $C_2$  are two arbitrary constants, and

$$g(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{*-k} + \int_k^{*1} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \cdot \frac{f(y)}{y-x} dy. \quad (5)$$

For an alternate form of the solution see the number 4.

<sup>1</sup>) See H. LOMAX and M. A. HEASLET, *Linearized Lifting-Surface Theory for Swept-back Wings with Slender Plan Forms*, Nat. Adv. Com. Aeron. Rep. No. 1992 (1949), where the problem is solved in a much more complicated manner.

2. If we put

$$\varphi^*(x) \equiv \begin{cases} \varphi(x), & (k < |x| < 1) \\ 0, & (|x| < k) \end{cases}, \quad f^*(x) \equiv \begin{cases} f(x), & (k < |x| < 1) \\ \psi(x), & (|x| < k) \end{cases},$$

where  $\psi(x)$  represents the unknown values of the integral on the left of (3) for  $-k < x < k$ , the given equation assumes the form (1) with  $\varphi \equiv \varphi^*$ ,  $f \equiv f^*$ ,  $b = 1$ . Hence, in virtue of (2), we can write

$$\varphi^*(x) = g(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-k}^{*k} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\psi(y)}{y-x} dy + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (6)$$

where  $g(x)$  has the expression (5) and  $C$  is an arbitrary constant.

The function  $\varphi^*(x)$  must vanish identically for  $|x| < k$ . Hence the unknown function  $\psi(x)$  has to satisfy the integral equation

$$\frac{1}{\pi} \int_{-k}^{*k} \sqrt{\frac{1-y^2}{y-x}} dy - \sqrt{1-x^2} g(x) + C, \quad (|x| < k)$$

which is of the type (1) again. Consequently, using (2) again, we get

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-k}^{*k} \sqrt{\frac{(1-y^2)(k^2-y^2)}{(1-x^2)(k^2-x^2)}} \cdot \frac{g(y)}{y-x} dy + \frac{C'x + C''}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}}, \quad (|x| < k) \quad (7)$$

where  $C'$  is a further arbitrary constant.

3. With the previous formula our problem is potentially already solved but, in order to get the explicit expression of  $\varphi(x)$ , we have to substitute the obtained expression of  $\psi(x)$  into (6). In this way, supposing  $k < |x| < 1$ , we find

$$\begin{aligned} \varphi(x) = g(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_{-k}^k \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \cdot \frac{dy}{y-x} - \int_{-k}^{*k} \sqrt{\frac{(1-z^2)(k^2-z^2)}{(1-y^2)(k^2-y^2)}} \cdot \frac{g(z)}{z-y} dz \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \cdot \frac{C'y + C''}{\sqrt{(1-y^2)(k^2-y^2)}} \cdot \frac{dy}{y-x} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

But the order of two integrations: one *with asterisk* and the other *without*, can be freely interchanged under very general hypothesis<sup>1)</sup>, while, on the other hand, for  $x$  real but *outside of*  $(-k, k)$ , we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \frac{y}{\sqrt{k^2-y^2}} \cdot \frac{dy}{y-x} &= 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2-k^2}}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-k}^{*k} \frac{1}{\sqrt{k^2-y^2}} \cdot \frac{dy}{y-x} &= -\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-k^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> See my quoted paper. In the actual case it will be sufficient that the function

$$[(1-z^2)(k^2-z^2)]^{1/2} g(z)$$

belongs to the class  $L^p$  with  $p > 2$  in the range  $(-k, k)$ .



hence

$$\begin{aligned} \varphi(x) = g(x) + & \frac{1}{\pi^2} \int_{-k}^k \sqrt{\frac{(1-z^2)(k^2-z^2)}{1-x^2}} \cdot \frac{g(z)}{z-x} dz \int_{-k}^k \frac{1}{\sqrt{k^2-y^2}} \cdot \frac{dy}{y-x} \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{-k}^k \sqrt{\frac{(1-z^2)(k^2-z^2)}{1-x^2}} \cdot \frac{g(z)}{z-x} dz \int_{-k}^{*k} \frac{1}{\sqrt{k^2-y^2}} \cdot \frac{dy}{y-z} \\ & + \frac{C|x| + C' \operatorname{sgn} x}{V(1-x^2)(x^2-k^2)}. \end{aligned}$$

Now the second double integral vanish identically since

$$\int_{-k}^{*k} \frac{1}{\sqrt{k^2-y^2}} \cdot \frac{dy}{y-z} \equiv 0, \quad (|z| < k)$$

while, using the second formula (8) again, we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} \int_{-k}^k \sqrt{\frac{(1-z^2)(k^2-z^2)}{1-x^2}} \cdot \frac{g(z)}{z-x} dz \int_{-k}^k \frac{1}{\sqrt{k^2-y^2}} \cdot \frac{dy}{y-x} \\ & = - \frac{\operatorname{sgn} x}{\pi V(1-x^2)(x^2-k^2)} \int_{-k}^k \sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)} \frac{g(z)}{z-x} dz; \end{aligned}$$

hence, putting  $C = -C_1$ ,  $C' = -C_2$ , we are thus getting (4) without more ado.

4. The integral on the right side of (4) can be simplified a little. In fact we have

$$\begin{aligned} \int_{-k}^k \sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)} \frac{g(z)}{z-x} dz &= - \frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \sqrt{k^2-z^2} \cdot \frac{dz}{z-x} \\ &\quad \times \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \sqrt{1-y^2} \frac{f(y)}{y-x} dy \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \sqrt{1-y^2} \frac{f(y)}{y-x} dy \int_{-k}^k \left( \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} \right) \sqrt{k^2-z^2} dz. \end{aligned}$$

But

$$\frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \sqrt{k^2-z^2} \frac{dz}{z-x} = \sqrt{x^2-k^2} \operatorname{sgn} x - x, \quad (k < |x| < 1)$$

and similarly for the integral with  $z - y$  instead of  $z - x$ ; hence

$$\begin{aligned} & \int_{-k}^k \sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)} \frac{g(z)}{z-x} dz \\ &= - \int_{-1}^k + \int_k^1 \frac{y-x + \sqrt{y^2-k^2} \operatorname{sgn} y - \sqrt{x^2-k^2} \operatorname{sgn} x}{y-x} \sqrt{1-y^2} f(y) dy \\ &= - \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \frac{\sqrt{x^2-k^2} \operatorname{sgn} x - \sqrt{y^2-k^2} \operatorname{sgn} y}{y-x} \sqrt{1-y^2} f(y) dy + \text{const.} \end{aligned}$$

This shows that the final formula can be put also into the alternate form

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-k} + \int_k^1 \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{y^2-k^2}{x^2-k^2}} \operatorname{sgn}(xy) \right] \frac{f(y)}{y-x} dy + \frac{C'x + C''}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}} \operatorname{sgn} x, \quad (9)$$

where  $C'$  and  $C''$  are two arbitrary constants.

I hope that the previous formulae will be of some utility in the calculation of modern airplanes.

### Zusammenfassung

Die vorliegende Notiz steht in Zusammenhang mit einer der letzten Arbeiten des Verfassers, in welcher die Gültigkeitsbedingungen der bekannten Söhnngenschen Lösung der Tragflügelgleichung bedeutend erweitert worden waren. Es wird gezeigt, daß die Söhnngensche Formel auch dann eine explizite Lösung liefert, wenn das Integral der Tragflügelgleichung auf ein *doppeltes Intervall* erstreckt wird, ein Fall, wie er in den modernen «Swept-back»-Flugzeugen vorkommt. Die so gefundene Lösung enthält zwei willkürliche Konstanten.

(Received: March 27, 1951.)

## Cavitation Pressures and Damage

By SPYRO KYROPOULOS, Pasadena, Calif., U.S.A.<sup>1)</sup>

### 1.

The interest in the magnitude of cavitation pressures stems largely from observations of cavitation damage. The oldest laboratory method of observation consists in exposing a specimen to cavitation in an apparatus which is, basically, a venturi. In order to meet special conditions, to reduce cost and to obtain results faster, several other methods have been developed. Simulating more or less conditions of "cavitation" damage observed in practice, they all attempt to obtain results faster mostly for the evaluation of the cavitation resistance of

<sup>1)</sup> California Institute of Technology, Norman Bridge Laboratory of Physics.

materials. The magnetostriction apparatus, although hardly resembling practical conditions at all, acquired great popularity mainly because it is the fastest method. Disregarding some rather peculiar features of the damage produced by that method, by and large, the damage produced by the various methods looks alike.

It has been largely *inferred* from that fact that the basic hydraulic phenomena causing the damage are the same with all methods and, more generally, whenever hydraulic damage is observed<sup>1)</sup>. An outstanding causative factor associated with the damage, is considered the formation of air or vapor bubbles in places of underpressure and their subsequent collapse close to the specimen in regions of higher pressure. The pressures created in that process of collapse are supposed to cause the damage. This concept predominates ever since Lord RAYLEIGH's [1]<sup>2)</sup> investigation of the pressures involved in bubble collapse.

Now, ACKERET [2], an undisputed expert and authority in the field, states that in his shock apparatus bubbles cannot form, the appearance of the damage being as usual. This statement and a careful critical study of the literature raises two questions:

First, could not the formation of bubbles, at least in some cases, just be an *indication* of some not yet fully understood damaging process? And, could not, again in some cases, the damage be caused by suction rather than by pressure? The German expression "Hohlsog" (cavity suction) for cavitation might suggest that this alternative interpretation of the phenomenon has been considered before, although the writer failed to find such indication in the literature.

Second, as hinted above: is similar damage necessarily an indication of a similar causative mechanism of hydraulic damage? It should not be overlooked that, except in very few cases (e.g. combustion), the phenomenon of "damage" is a characteristic of the *material* rather than of the process that causes it. This is particularly true of the behavior of metallic solids when exposed to the action of mechanical forces. Hence, faced with the deformation and damage phenomena observed, all one can tell is that they are caused by mechanical forces the true nature of which may vary with the conditions of the experiment. This view is supported by otherwise hardly reconcilable evidence in the literature of which it suffices to quote two extreme cases [3], [4].

There is, however, one significant exception in the realm of mechanical deformation, viz. the appearance of twinning (Neumann bands) notably with pure iron, which, except for low temperatures, is caused exclusively by shock. Obviously this criterion lends itself to a more thorough comparative study of the various "cavitation" phenomena and methods.

The preceding section may serve to indicate briefly a number of points which need clarification in the basic study of hydraulic damage. The phenomena of metal deformation associated with it lead to one of the most controversial issues of the whole field: the magnitude of "cavitation" *pressures*.

## II.

There are two schools of thought, the "low pressure" hydrodynamic school, essentially represented by ACKERET and DE HALLER [5] and the "high pressure" school, represented by workers who base their argument on metallographic evidence. Representatives of this school are e.g. VON SCHWARZ and MANTEL [6].

<sup>1)</sup> The term "hydraulic damage" is more general and appears preferable to "cavitation damage" which is by usage associated with collapse of bubbles as a cause and, in most cases, expresses more than we know for sure.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, p. 410.

ACKERET and DE HALLER [5] characterize the situation as follows: "The present situation is odd inasmuch as metallographers seem not to get along without the high pressures, whereas the hydrodynamicists cannot find them."

The figures are about as follows: at most 900 to 1600 kg/cm<sup>2</sup> (ACKERET, etc.) vs. 9000 to 32,000 kg/cm<sup>2</sup> (VON SCHWARZ, MANTEL, etc.) and the discrepancy exists between the low measured and computed figures (DE HALLER [7]) and the high ones supposedly required to explain the deformations of metallic solids observed.

The argument advanced against ACKERET and DE HALLER is, essentially, that their measurements of pressures by means of a piezoquartz are too crude, yielding only the low pressure average over too large an area, against the "real" high local pressures.

This argument does not appear cogent on inspecting e.g. the photomicrographs reproduced by BOETCHER [8] and MOUSSON [9] of gun metal and stainless steel, showing surface waviness and strain lines in the first case and slip planes (possibly also twins) in the latter, all *associated with more or less heavily eroded crystal boundaries*. The pictures shown are undoubtedly areas of relatively large specimens and there are no indications of alternating small areas of so low and so high pressures as to average out—necessarily—to the low values measured and calculated by the hydrodynamicists.

The arguments of the high pressure school against "low" pressures are, thus far, *negative* and subject to doubt. We proceed to show that, as far as "high" pressures are concerned, they suffer from a decisive oversight which may invalidate them entirely.

All the pictures, found so far, purporting to demonstrate high pressures with various signs of deformation for evidence, have two aspects in common: evidence of plastic deformation restricted to the surface and more or less *eroded crystal boundaries*. There is, furthermore, perfect agreement in the literature that "cavitation" attack starts in the grain boundaries, etc. *before affecting the grains proper*. This indicates, strongly, that the visible plastic deformation of the grains constitutes a *second* stage in the attack. Indeed, in fine-grained structures, which are basically more resistant, as has long been known, evidence of deformation is usually considerably less pronounced.

It can be accepted that the high pressures necessary for plastic deformation of the *polycrystalline* material in ordinary tests (here presumably compressive tests) amount to 9000 to 30,000 kg/cm<sup>2</sup>. It has been *inferred* that the same high pressures must obtain in "cavitation" in order to produce a similar plastic deformation.

There is no evidence in the literature that it has ever been considered that the two cases are not strictly comparable, since, in the ordinary case, the grains are cemented together by the intercrystalline substance, whereas in the case of cavitation that supporting cement is largely eroded<sup>1)</sup>.

In other words, in the latter case we are dealing, not with a smooth *polycrystalline* surface as in testing materials, from which the high figures are derived, but instead with a surface from which *single crystals* protrude.

<sup>1)</sup> In view of the fact that in some cases the specimens exposed to cavitation were drastically quenched from elevated temperatures, e.g. the stainless steels, it is possible that the plastic deformation observed after cavitation was, actually, sometimes due to cooling stresses and only revealed by cavitation which in its initial stages acts almost like a metallographic etch.

A very instructive photomicrograph of calcium as cast, plastically deformed by such stresses is shown by EVERTS and BAGLEY, Trans. Electrochem. Soc. 93, 265 (1948), fig. 2.



Now, it is a well-known fact that it takes a materially smaller pressure to deform plastically a single crystal than it takes to deform a polycrystal because of the strengthening effect of the crystal boundaries [10]. In the case of aluminum, whose face-centered cubic structure permits slip in several planes, data are available and the ratio of the pressures required is about 1:4 [11]. Hence, even in this for our argument comparatively unfavorable case, the deformation pressure, necessary to produce slip in the *surface*, that is, in the single crystal part deprived of its strengthening boundary cement, would be of the order of about 2000 kg/cm<sup>2</sup> which comes rather close to the "hydrodynamic" lower pressure figure. In the case of hexagonal crystals, such as zinc and cadmium, the ratio is about 1:15.

Although this reasoning is, quantitatively, only a rough approximation, it is obvious that the effect must be real and deprives the deformation argument against "low" pressures of its physical basis unless much refined measurements can demonstrate, against present indications, that deformation takes place with the strong materials quoted with intact crystal boundaries.



Fig. 1

Section through metal:  
crystal boundaries intact—true poly-crystal.

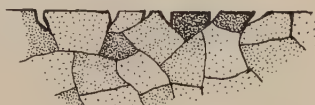


Fig. 2

Section through metal:  
crystal boundaries partly eroded (dark)  
leaving small single crystals.

It is equally evident that the effect must be smaller, the thinner the grain boundaries are. Other things being equal, they are the thinner the smaller the grain size, since the same amount of intercrystalline "cement" is, in that case, spread over a larger over-all surface. This is substantiated by experimental evidence, showing less grain deformation with smaller grained specimens.

In practical cases the thickness of the crystal boundaries is largely determined by the quantity of impurities insoluble in the metallic solid. Our investigation shows the practical importance of keeping the concentration of non-isomorphously soluble components (i.e. impurities) as low as possible in order to obtain the thinnest possible crystal boundaries and, thus, the maximum of intercrystalline support and, by virtue of this, the maximum possible resistance to cavitation damage. This resistance is less determined by small grain size but rather by thin crystal boundaries.

*Summary:* The relation between cause and effect in hydraulic (so-called "cavitation") damage is briefly critically surveyed. It is pointed out that appearance of the damage is characteristic of the properties of the material rather than of the process that causes it. The exceptional case of the formation of Neumann bands may be used to gain deeper insight into the damaging mechanisms.

In some cases the plastic deformations attributed to cavitation, may be, actually, deformations by cooling stresses, revealed by subsequent cavitation.

It is shown that plastic deformation of polycrystals under "cavitation" conditions is not strictly comparable to plastic deformation under ordinary test conditions, because in the cavitation case the erosion of the intercrystalline cement greatly reduces the mutual support of the grains, converting the otherwise smooth surface into a surface of protruding laterally poorly supported single crystals which are much easier to deform.



It is estimated from experimental data that, as a consequence, the magnitude of the cavitation *pressures* might range from 1/4 to 1/15 of those hitherto inferred from metallographic evidence, which would bring them considerably closer to the values measured and calculated by ACKERET and DE HALLER.

Conclusions suggest themselves with regard to cavitation resistance of metallic solids.

## REFERENCES

- [1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. [6] 34, 94 (1917).
- [2] J. ACKERET and P. DE HALLER, Schweiz. Bauztg. 108, 105 (1936).
- [3] F. K. TH. VAN ITERSON, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. Sect. Sciences 39, 138, 330 (1936).
- [4] G. PETRACCHI, quoted from: Engineers' Digest [9] 10, 314 (1949).
- [5] J. ACKERET and P. DE HALLER, Schweiz. Bauztg. 108, 105 (1936).
- [6] W. VON SCHWARZ and M. MANTEL, Schweiz. Bauztg. 109, 225 (1937).
- [7] P. DE HALLER, Schweiz. Bauztg. 101, 243, 260 (1933).
- [8] H. N. BOETCHER, Trans. A.S.M.E. 58, 355 (1936).
- [9] J. M. MOUSSON, Trans. A.S.M.E. 59, 399 (1937).
- [10] F. SEITZ, *The Physics of Metals* (McGraw-Hill Book Co., New York 1943), p. 109ff.
- [11] F. SEITZ, loc. cit., p. 119, fig. 74.

## Zusammenfassung

Der Erfolg der Wirkung einer Kraft auf ein Material (zum Beispiel plastische Deformation von Metall) ist im allgemeinen vorwiegend eine Materialeigenschaft, daher ungeeignet zu zwingenden Schlüssen auf den Mechanismus der Kraftwirkung. Daher wird der allgemeinere Ausdruck «hydraulische Schädigung» vorgeschlagen, im Gegensatz zu dem allzu bestimmten «Kavitationsschaden».

Bezüglich der hierbei auftretenden Druckgrößen bestehen zwei Anschauungen, die hydrodynamische und die metallographische. Erstere führt zu Drucken von 900 bis 1600 kg/cm<sup>2</sup>, letztere auf Grund von vergleichenden Deformationsbeobachtungen an polykristallinem metallischem Material zu 9000 bis 32000 kg/cm<sup>2</sup>. Die vorliegende Studie betrifft die Deutung dieser Beobachtungen.

Anscheinend stimmen alle Beobachter darin überein, daß die erste Stufe hydraulischen Angriffs in der Erosion der Korngrenzen besteht. Häufig ähnelt der Angriff einer metallographischen Ätzung, so daß das Erscheinen von Deformationszwillingen bei hydraulischem Angriff, mangels weiteren Beweises, zuweilen auch als Entwicklung einer Deformationsstruktur, herrührend von Abschreckspannungen, gedeutet werden kann.

Wenn nichts über die Eindringungstiefe der hydraulischen Deformation bekannt ist, erscheint ein Kristallitenkonglomerat mit *erodierten* Korngrenzen vergleichbar lose aneinandergereihten Einkristallen, zu deren plastischer Deformation wesentlich geringere Drucke hinreichen als für polykristallines Material mit lückenlos ausgefüllten Korngrenzen. Im Falle des Al ist das Verhältnis etwa 1:4, bei hexagonalen Kristallen, wie Zn und Cd, etwa 1:15. Dies führt auf Drucke der Größenordnung von 2000 kg/cm<sup>2</sup>, notwendig für hydraulische Deformation, die den Drucken der hydrodynamischen Auffassung nahekommen.

(Received: March 4, 1951.)

### Zweiter Internationaler Kongreß der Union für Kristallographie in Stockholm (27. Juni bis 12. Juli 1951)

Der sehr gut besuchte Internationale Kongreß für Kristallographie wurde von Sir LAWRENCE BRAGG präsiert, Ehrenvorsitzender war M. VON LAUE. Neben geschäftlichen Sitzungen und Kommissionsbesprechungen wurden in drei parallel durchgeführten Veranstaltungen mehr als 200 Kurzvorträge (Dauer im Mittel 10 Minuten) gehalten. Von der Tagung erschien eine über 100 Seiten umfassende Zusammenstellung der «Abstracts of Papers».

Diese Art der Kongreßführung hat ihre Vor- und Nachteile. Die Kurzvorträge konnten nicht viel mehr bieten als die Zusammenfassungen, die Diskussionen vermochten einige Punkte aufzuklären, allein die starke Belastung der Teilnehmer und die Verteilung auf die verschiedenen Parallelveranstaltungen waren der vollen Ausnützung der außerordentlich anregenden wissenschaftlichen Tagung hinderlich. Eine Beschränkung auf wenige Themata mit einigen Hauptreferenten und anschließender gemeinsamer Diskussion (besonders bei frühzeitiger Übermittlung der vollinhaltlichen Hauptarbeiten, die dann mehr nur noch erläutert worden wären) hätte vermutlich ein geschlosseneres Bild der Arbeiten auf dem Gebiet der Kristallstrukturbestimmung, der Kristallphysik und Kristallchemie vermittelt. Andererseits wurde so einer sehr großen Zahl von Forschern Gelegenheit gegeben, über ihre neuesten Arbeiten zu berichten und dadurch eine Vielfalt der Bestrebungen dokumentiert, mit der sich jeder Teilnehmer gerne vertraut gemacht hat. Zudem kam durch eine geschickte Gruppierung der Kurzvorträge doch eine gewisse Einheitlichkeit zur Geltung.

In diesem Sinne traten besonders hervor die Vorträge im «Symposium on advanced techniques in structure determination» und im «Symposium on electron diffraction in gases».

Im erstgenannten Symposium wurde über verschiedene äußerst wichtige *Verbesserungen der Strukturbestimmungsmethoden* durch die mathematische Behandlung der Patterson-Diagramme und der Elektronendichtekarten referiert. Zur Behandlung kamen nicht nur neue, meist statistische Methoden zur Eliminierung von Schwierigkeiten bei der Deutung der experimentellen Resultate (zum Beispiel von A. L. PATTERSON, C. A. BEEVERS, D. WRINCH, D. McLACHLAN, J. GARRIDO, D. ROGERS, M. J. BUEGER, W. COCHRAN, H. HAUPTMANN, A. J. C. WILSON, C. A. TAYLOR, H. LIPSON, E. G. COZ, D. SAYRE, V. LUZZATI, D. W. CRICKSHANK, D. P. SHOEMAKER, D. HERKER, J. A. GOEDKOOP usw.), sondern auch Angaben über die bei der Synthese zu benützenden photoelektrischen Maschinen, gewöhnlichen Rechenmaschinen und Lochkartensysteme.

Die *Elektronenbeugung* als solche (zum Beispiel Kikuchi-Linien usw.) wurde mehrfach (zum Teil unter starker Beteiligung japanischer Forscher) behandelt und fand dann im zweitgenannten Symposium Anwendung auf die Untersuchungen von Gasen verschiedenster Art (zum Beispiel durch L. E. SUTTON, S. H. BAUER und Mitarbeiter, L. S. BARTELL, L. O. BROCKWAY, P. W. ALLEN, H. MACKLE, K. HEDBERG, V. SCHOMAKER, M. E. JONES).

Auch über *Neutronenbeugung* wurde von G. E. BACON und C. G. SHULL berichtet.

Recht zahlreich waren interessante neue *Strukturbestimmungen an organischen Substanzen*, wobei der Proteinstruktur besondere Aufmerksamkeit gewidmet war.

Bei den *Kristallstrukturen anorganischer Verbindungen* seien diejenigen einfacher und komplexer Oxyde (auch von Pa-Oxyden durch W. H. ZACHARIASEN, von Sb-Oxyden durch B. MASON) von Fluoriden und Verbindungen der Salpetersäure (V. LUZZATI) beispielhaft erwähnt.

Großes Interesse erweckten ferner die Arbeiten über die *Strukturen der Ferroelektrika*, der *Metalle* und ihrer *Legierungen* überhaupt und über die *martensitähnlichen Kristallverbindungen*.

Auch über wichtige *Mineralien*, darunter die Tonmineralien (zum Beispiel durch G. W. BRINDLEY) erfolgten zahlreiche Kurzvorträge, wobei zum Teil den unregelmäßigen Strukturen mit verschiedener Periodizität und den Kristalldeformationen eingehend Beachtung geschenkt wurde; letzteres auch in der Gruppe «Cold-worked metals».

Berichte über *Kristallwachstum*, *Kristallsymmetrie*, *Instrumente* und *Modelle* usw. ergänzten, wenn auch lückenhaft, das zu beackernde Gesamtgebiet. Die Vorträge werden in verschiedenen Periodika erscheinen, so daß sie, obgleich keine eigentliche Kongreßpublikation erfolgt, bald zugänglich sein werden.

Für die nächste Amtsperiode wurde Prof. J. BIJVOET von Utrecht zum Präsidenten gewählt. Der dritte Kongreß wird 1954, vermutlich in Paris, abgehalten.

P. NIGGLI

### Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GaMM)

Der Vorstandsrat der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GaMM) beschloß, die nächste wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft in der Zeit vom 4. bis 7. Juni 1952 (Pfungstwoche) in *Braunschweig* zu veranstalten.

H. GÖRTLER

### Erratum

**Beobachtungen an Wirbelrohren.** VON HERBERT SPRENGER (ZAMP 2, Fasc. 4, 297 [1951]; Figur 4, links). Die Drehrichtung der Drallströmung  $S_2$  ist falsch skizziert.  $S_3$  hat den gleichen Drehsinn wie  $S_1$ .

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939 bis 1946** (für den Buchhandel bestimmte Ausgabe der *Fiat Review of German Science*) (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden). Preis je Band DM 10.

Band 17 und 18: *Geophysik*, Teil I und II. Herausgegeben von J. BARTELS (Wiesbaden 1948), 237 und 321 Seiten.

Das Ziel des zweibändigen Werkes ist die Vermittlung eines Überblickes über die in den Kriegsjahren in Deutschland erzielten Forschungsergebnisse und über die in dieser Zeit erschienene Literatur auf dem Gebiete der Geophysik. Über den behandelten Stoff orientieren am besten die Titel der einzelnen Abschnitte, nämlich in Band 17: 1. Allgemeines; 2. Die Erde als Planet, Erdgestalt, Erdinneres, Schwere; 3. Erdmagnetismus; 4. Ionosphäre; 5. Atmosphärische Elektrizität; 6. Geologische Anwendungen der Geophysik. In Band 18: 7. Seismik;

8. Ozeanographie; 9. Hydrographie; 10. Die Erde als geodätisches Meßfeld für Lage- und Höhenbestimmungen; 11. Das atmosphärische Ozon. Vor dem Kriege konnte man sich an Hand der «Zeitschrift für Geophysik» jederzeit ein Bild vom Stande der geophysikalischen Forschung machen. Diese Zeitschrift mußte während des Krieges ihr Erscheinen einstellen, und es entstand eine empfindliche Lücke, die nunmehr durch das vorliegende Werk ausgefüllt wird. Die übersichtliche Anordnung, unterstützt durch eine entsprechende drucktechnische Darstellung und durch ein Autoren- und Sachverzeichnis am Schluß von Band 18, ermöglicht dem Interessenten eine rasche Orientierung über jedes gewünschte Teilgebiet. Man kann dabei feststellen, daß auf einzelnen Gebieten auch während des Krieges namhafte Fortschritte erzielt worden sind. Besonders hervorgehoben sei ein imposantes Beispiel der kombinierten Anwendung geophysikalischer Prospektionsmethoden, nämlich die geophysikalische Reichsaufnahme, über deren Resultate im Text, unterstützt durch instruktive Karten, von H. REICH in Band 17 berichtet wird. Lediglich der Orientierung halber sei noch erwähnt, daß einzelne Abschnitte besonders ausführlich behandelt werden, nämlich in Band 17 die zeitlichen Variationen des Erdmagnetismus und die Ionosphäre, in Band 18 die Ozeanographie.

F. Gaßmann

Band 19: *Meteorologie und Physik der Atmosphäre*. Herausgegeben von R. MÜGGE (Wiesbaden 1948), 306 Seiten.

Der Band 19 gibt auf zirka 300 Seiten einen guten Überblick über die Tätigkeit deutscher Klimatologen und Meteorologen während der Jahre 1939 bis 1946. Der Inhalt ist nach den folgenden Teilgebieten geordnet: 1. Klimatologie; 2. Strahlungsvorgänge in der Atmosphäre; 3. Thermodynamik und Physik der Wolken; 4. Dynamik der Atmosphäre; 5. Wetter und Wettervorhersage; 6. Meteorologie der hohen Atmosphäre; 7. Meteorologische Instrumente; 8. Chemie der Atmosphäre.

Im ganzen wird über zirka 1100 in Deutschland erschienene Originalarbeiten referiert. Trotz der großen Fülle des dargebotenen Stoffes macht der Verfasser darauf aufmerksam, daß für gewisse Grenzgebiete zur Ergänzung mit Vorteil die *Fiat Review* benachbarter Gebiete zu Rate gezogen werden soll, vor allem die Bände über Geographie, Geophysik, angewandte Mathematik, Biophysik.

E. Wanner

Band 20: *Astronomie, Astrophysik und Kosmogonie*. Herausgegeben von P. TEN BRUGGENCATE (Wiesbaden 1948), 441 Seiten.

Dieser Band beginnt mit einem Vorwort von M. von LAUE, welches auf knapp drei Seiten auf das, was einem Physiker, der von der Astronomie einen gewissen Abstand hat, als das Wesentliche erscheint, hinweist. Der Band umfaßt 15 Artikel, welche von zwanzig Mitarbeitern verfaßt sind und zeigen, daß in Deutschland während der Kriegsjahre auf fast allen aktuellen Gebieten der Astronomie gearbeitet worden ist. Da für alle Gebiete Mitarbeiter gewonnen werden konnten, die selbst aktiv und maßgeblich an der Förderung der Wissenschaft mitgearbeitet haben, braucht kaum erwähnt zu werden, daß der Band durchaus auf hohem Niveau steht. Bei der Mannigfaltigkeit des Stoffes, der sowohl die klassische Astronomie (Astrometrie, Orts- und Zeitbestimmung sowie Himmelsmechanik) umfaßt als auch die heute dominierende Astrophysik (Grundlagenfragen, innerer Aufbau der Sterne, Sternatmosphären, solare Probleme, Sternsysteme) wie auch die schon sehr in das Gebiet der theoretischen Physik



hineingreifende Kosmogonie, ist nicht daran zu denken, in dieser kurzen Besprechung auf einzelne Beiträge einzugehen. Es sei nur die Arbeit des Herausgebers hervorgehoben, welcher es verstanden hat, das ganze Gebiet in glücklicher Weise zu unterteilen, den Umfang jedes Artikels in einem seiner Bedeutung entsprechenden Rahmen zu halten und die geeigneten Mitarbeiter zu finden. Als ein unter schwierigen äußern Bedingungen entstandenes Gemeinschaftswerk vermittelt es einen Überblick von beachtenswerter Homogenität, was dem Leser besonders dort klar wird, wo diese ausnahmsweise fehlt. Während die meisten Autoren ihr Forschungsgebiet in einen internationalen Rahmen hineinstellen, bevorzugen andere eine streng national begrenzte Darstellung, was sich bei dem vorliegenden Werk zweifellos rechtfertigen läßt, aber doch bei dem mit der Materie nicht völlig vertrauten Leser leicht zu Mißverständnissen führen kann. Diese verschwinden jedoch, wenn man das Werk als das betrachtet, was es in Wirklichkeit ist: eine Darstellung der Entwicklung einer Wissenschaft in einer bestimmten Zeit und in einem begrenzten Raum, also ein geschichtliches Werk.

M. Waldmeier

Band 21 und 22: *Biophysik*, Teil I und II. Herausgegeben von B. RAJEWSKY und M. SCHÖN (Wiesbaden 1948, 1949). Teil I: 257 Seiten; Teil II: 411 Seiten.

Teil I unter Mitarbeit von H. BAUER, M. DORNEICH, W. DREBLOW, H. FRIEDRICH-FRESKA, U. HENSCHKE, R. JAEGER, G. KAHLAN, A. KREBS, H. KREFFT, H. LANGENDORFF, W. LUTHER, H. MUTH, H. SCHAEFER, A. SCHRAUB, R. SCHULZE und K. SOMMERMEYER.

Teil II unter Mitarbeit von H. AUTRUM, K. BÜTTNER, H. DÄNZER, H. DANNENBERG, W. DREBLOW, O. ERBACHER, W. FRIEDRICH, H. FRIEDRICH-FRESKA, J. GAEBELER, H. GRAF, U. HINTZELMANN, P. JORDAN, A. KREBS, A. E. H. MEYER, H. MUTH, J. PÄTZOLD, G. PICKARSKI, R. POHLMANN, M. RUEHL, STANISLAUS, B. DE RUDDER, H. SCHAEFER, H. V. SCHELLING, A. SCHRAUB, G. SCHUBERT, H. SCHWAN, E. O. SEITZ, R. STACHOWIACK, R. TEUCHER und L. WENDT.

Die vorliegenden zwei Bände geben eine Übersicht über ein Grenzgebiet, über dessen Ausdehnung und Auswirkung auf andere Gebiete man verschiedener Meinung sein kann. Wie weit die Verwendung physikalischer Meßmethoden in der Biologie zur biologischen Technik oder zur Biophysik zu rechnen ist und wie weit die Übertragung theoretisch-physikalischer Prinzipien auf biologische Probleme als «biophysikalisches» oder biologisch eigenstes Gedankengut zu bezeichnen ist, darüber läßt sich streiten. Wie immer wird aber die initiale Abgrenzung eines neuen Gebietes schließlich zur Ausweitung des Hauptfaches führen (in diesem Fall der Biologie) und dann als Unterabteilung in diesem Fach aufgehen. Vorläufig beansprucht die Biophysik noch eine eigene Lebensberechtigung, und das geht auch aus den zwölf Kapiteln der Berichte hervor. Im ersten Band sind die in die Kriegszeit fallenden Arbeiten über die Quantenphysik und Statistik in der Biologie, die biologischen Strahlenwirkungen, Strahlenschädigungen und den Strahlenschutz nebst gesonderter Behandlung der Dosimetrie behandelt, also im Prinzip die aus der Wechselwirkung zwischen Strahlungsenergie und lebendem Objekt sich ergebenden Fragen. Die Treffertheorie, die Frage der Erzeugung von Mutationen und die sich aus den Strahlenwirkungen ergebenden Fragen des Schutzes stehen begreiflicherweise im Vordergrund der Betrachtung. Die Darstellung ist knapp und präzise und hat vor allem als Schlüssel zur Auffindung der Originalarbeiten eine besondere Bedeutung.

Im zweiten Band kommen dann die Wirkungen hochfrequenter Außenfelder, die im lebenden Körper erzeugten elektrischen Ströme, die Sinneswahrnehmungen



gen und die physikalischen Methoden und Hilfsmittel in der biologischen und medizinischen Forschung zur Besprechung. Ein besonderes Kapitel ist der Bioklimatologie und der Balneologie gewidmet. Die Kapitel über die Verwendung radioaktiver Isotopen und die Anwendung des Elektronenmikroskops sind insofern unbefriedigend, als hier die fehlende Bezugnahme auf das, was gleichzeitig in den außerdeutschen Ländern gemacht wurde, besonders bemerkbar wird. Man muß diese Berichte eben als das lesen, als was sie in Auftrag gegeben wurden, nämlich als Bericht über die deutsche Forschung in den Kriegsjahren. In dieser Hinsicht vermitteln sie ein zuverlässiges und sorgfältig zusammengestelltes Bild.

A. von Murali

Band 30: *Physikalische Chemie*, herausgegeben von KLAUS CLUSIUS (Wiesbaden 1948), 270 Seiten.

Band 32 und 33: *Metallkunde der Nichteisenmetalle*, Teil I und II. Herausgegeben von MAX HANSEN (Wiesbaden 1948). Teil I: 207 Seiten; Teil II: 171 Seiten.

Diese sehr wertvollen Zusammenstellungen, die über Forschungen in Deutschland während des Zweiten Weltkrieges Auskunft geben, dienen der Überbrückung einer Zeit, die dem Austausch wissenschaftlichen Gedankengutes wenig förderlich war. Dadurch, daß hervorragende Forscher Sachgebiete als Ganzes darzustellen bemüht waren, erhöht sich der Nutzen der Publikationen.

Aus Band 30 seien erwähnt: G. DICKEL, Trennung inaktiver Isotopen, Thermodiffusion und Diffusionsthermik, spezifische Wärme von Gasen, Adsorption und Desorption. — K. CLUSIUS, Spezifische Wärme und Wärmeinhalt des Festkörpers. — H. VOLKMANN, H. A. STUART, H. ERBRING, G. V. SCHULZ, Studien über Flüssigkeitsstrukturen, Oberflächen- und Grenzspannung, über Makromoleküle, Kolloidchemie, Kettenreaktionen und Polymerisationen.

Sehr groß ist der Mitarbeiterstab der Bände 32 und 33. Es wird über Erzeugung und Raffination sowie Eigenschaften und Verarbeitung der Elemente K, Be, Mg, Al, Ti, Zr, Th, U, Mn, Ni, Cu, Zn, Cd, In, Tl, Si, Pb, Sb berichtet. Eingehend sind die Legierungen der Leichtmetalle behandelt. Über Pulvermetallurgie und Sinterwerkstoffe referieren H. BERNSTORFF und G. WASSERMANN.

P. Niggli

**Analytische Geometrie.** Von Dr. GERHARD ENGEL (Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1950). 239 S., 114 Abb.; DM 18.—.

Das vorliegende Werk setzt sich zum Ziel, eine Verbindung herzustellen zwischen der mittelschulmäßigen Darstellung der analytischen Geometrie und ihrer Behandlung auf der Hochschule. Der Verfasser geht von der elementaren Darstellungsweise der Mittelschule aus und gibt erst am Schlusse einen Überblick über den Vektor- und Matrizenkalkül. In den üblichen Kapiteln über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes sind zahlreiche weiterreichende Bemerkungen eingeflochten, wie etwa über Determinanten, über die allgemeineren geradentreuen Abbildungen sowie über das Auftreten des Imaginären in der Geometrie. Um dem Leser ein Gefühl des festen Bodens zu geben, sind zahlreiche durchgerechnete numerische Beispiele in die einzelnen Kapitel eingefügt.

Am Schluß bringt der Verfasser noch einige Verallgemeinerungen des Koordinatenbegriffs sowie eine Einteilung der Geometrie nach dem Gruppenprinzip.

Das Büchlein ist sehr flüssig und übersichtlich geschrieben und löst die Aufgabe einer Verbindung der elementaren und der hochschulmäßigen analytischen Geometrie in vorzüglicher Weise.

M. Jeger

**Einführung in die analytische Geometrie.** Von Prof. Dr. L. BIEBERBACH (Verlag für Wissenschaft und Fachbuch GmbH., Bielefeld 1950). 168 S., 43 Abb.; DM 8.90.

Immer mehr kommt der einführenden Vorlesung über analytische Geometrie eine gewichtige Rolle bei der Einführung des Studierenden in modernes mathematisches Denken zu. So ist es denn zu begrüßen, daß von BIEBERBACHS dreibändigem Werk über die Theorie der linearen und quadratischen Gebilde in Ebene und Raum vorerst einmal der erste Band, *Einführung in die analytische Geometrie*, neu erschienen ist.

Die vorliegende vierte Auflage des ersten Bandes wurde neu bearbeitet; der Verfasser hat nur etwa einen Drittel des Textes unverändert aus der dritten Auflage übernommen. Für diese Neubearbeitung waren vorwiegend didaktische Belange maßgebend, so daß die Auswahl des Stoffes nur wenig von derjenigen früherer Auflagen abweicht. Stofflich neu ist einzig ein Anhang über die analytische Geometrie des Kreises und der Kreisscharen. Daneben wurde noch das Register durch die Aufnahme historischer Notizen erweitert.

Der erste Band von BIEBERBACHS Theorie der linearen und quadratischen Gebilde läßt bewußt das stofflich Neue hinter dem methodisch Neuen zurücktreten. An der Spitze steht die Darstellung der Vektorrechnung und des Matrizenkalküls. Ferner findet sich darin eine kurze und sehr elegante Theorie der Determinanten; der Verfasser führt die  $n$ -reihige Determinante mit Hilfe einer Volumenfunktion von  $n$  Vektoren im  $n$ -dimensionalen Raum ein. An dieser Stelle sowie später im Abschnitt über Matrizen verläßt das Büchlein den Rahmen des Anschaulichen, indem es für die Darstellung den  $n$ -dimensionalen affinen Raum zugrunde legt. Ein Abschnitt über die Einteilung der Geometrie nach dem Gruppenprinzip soll auf die beiden andern Bände, *Projektive Geometrie* und *Höhere Geometrie*, überleiten.

Der Verfasser sieht von numerischen Beispielen ganz ab. Dagegen sind am Schlusse jedes Kapitels zahlreiche, die Theorie weiterführende Beispiele eingeflochten, die dem Leser das Aufnehmen des Stoffes sehr erleichtern.

Die *Analytische Geometrie* BIEBERBACHS ist ausgezeichnet geschrieben und darf ohne weiteres zu den Standardwerken über diesen Gegenstand gezählt werden.

M. Jeger

**Advanced Plane Geometry.** By C. ZWIKKER (North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1950). 299 pp., 273 figs; hfl. 20.—.

Für den Referenten war dieses Buch eine Überraschung, und zwar sowohl seiner Art als auch seines Inhaltes nach. Von den übrigen Büchern über ebene Geometrie ist das vorliegende sehr verschieden. Es enthält, wie eine historische Notiz am Schluß nochmals ins Licht stellt, eine Weiterentwicklung der grundlegenden Arbeiten von CASPAR WESSEL, FRIEDRICH GAUSS und SIEBECK über die konsequente Verwendung der komplexen Ebene zur Behandlung der Aufgaben der ebenen Geometrie. Die Geraden und Kurven in dieser Ebene werden in der Form  $z = f(u)$  dargestellt, wobei  $z = x + jy$  die Koordinaten eines Punktes in dieser Ebene darstellt und  $u$  ein reeller Parameter ist. Die Funktion  $f$  ist komplex. Auf Geraden und Kurven, welche durch diese Gleichung dargestellt werden, können nun die üblichen komplexen Transformationen  $w = f(z)$  angewandt werden. Die konsequente Anwendung dieser einfachen Hilfsmittel führt zu einer übersichtlichen und an vielen Orten viel klareren Behandlung fast sämtlicher Sätze und Kurven der ebenen Geometrie als mit den üblichen Mitteln. Ein Bild der behandelten Probleme wird durch folgende Zusammenstellung der Kapitel-

überschriften vermittelt: Die Ebene. Die geometrische Deutung analytischer Operationen mit komplexen Zahlen. Die Gerade. Das Dreieck. Der Kreis. Algebraische Kurven. Ellipse. Hyperbel. Parabel. Involuten, Evoluten und antikaustische Kurven. Pedalen und abgeleitete Kurven. Flächen- und andere Integrale. Enveloppen. Orthogonaltrajektorien. Unstetige Kurven: Spiralen. Lemniskaten. Zykloiden. Epi- und Hypozykloiden. Kardioiden und Limaçon. Profile von Zahnrädern. Die einzelnen Kapitel sind sehr klar und flüssig geschrieben. An vielen Stellen gibt der Verfasser Ausblicke auf Probleme der angewandten Mathematik. Hierbei ist es kaum zu vermeiden, daß die didaktische Reihenfolge an einigen Stellen durchbrochen werden muß, was jedoch dem Gesamtinhalt kaum schadet. Das Buch scheint namentlich für Elektroingenieure, die sich mit der Ortskurventheorie von höherem Standpunkte aus vertraut machen wollen, außerordentlich interessant. Aber auch der angewandte Mathematiker und vielleicht sogar der reine Mathematiker dürften in diesem Buch manches finden, das Anregungen und Ausblicke auf weitere Probleme vermittelt. Allen diesen Kreisen sei das Werk wärmstens empfohlen.

M. Strutt

**Integrieren mit dem Integrappen Coradi.** Von Dr. H. SCHILT (H. Böniger, Zürich 1950). 46 S., sFr. 4.50.

Mathematische Instrumente können nur dann wirtschaftlich betrieben werden, wenn ihre häufige Benützung sichergestellt ist. Dies setzt bei vielseitig verwendbaren Instrumenten eine ausreichende Kenntnis ihrer Möglichkeiten voraus. Der Verfasser hat sich die dankbare Aufgabe gestellt, für den bisher viel zu wenig beachteten Integrappen eine Auswahl der wichtigsten Anwendungsbeispiele zusammenzustellen. Dabei führt er neben den klassischen Aufgaben (*Bestimmung einer Fläche und ihrer Momente von der Form  $\int y^n dx$ ; Bestimmung des Deviationsmomentes und höherer gemischter Momente von der Form  $\int x y^n dx$ ; Bestimmung der Querkkräfte, Biegemomente und der elastischen Linie eines belasteten Stabes; Bestimmung der Trägheitsmomente von Rotationskörpern*) einige praktisch wichtige Fälle an, die weniger allgemein bekannt sein dürften. So die *Lösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades, die Ermittlung von Linienintegralen und die Fehlerrechnung*. Die Lektüre gibt nicht nur die Ableitungen und «Kochrezepte» für die erwähnten Aufgaben, sondern regt auch zum weiteren Ausbau der durch die Vielseitigkeit des Instrumentes gegebenen Möglichkeiten an. Obwohl das Buch nur von einer bestimmten Integrappenbauart ausgeht, die ausführlich beschrieben wird, läßt sich der umfangreiche mathematische Teil weitgehend auf Integrappen beliebiger Konstruktion anwenden.

Th. Erismann

**Technische Schwingungslehre, Band 1: Einfache Schwinger und Schwingungsmeßgeräte.** Von KARL KLOTTER (Springer-Verlag, Berlin 1951). 399 S., 360 Abb.; DM 46.50.

Das Buch ist die erweiterte zweite Auflage des 1938 vom Verfasser herausgegebenen ersten Bandes seiner *Einführung in die technische Schwingungslehre*. Aus dieser Einführung ist ein Lehrbuch des Schwingers mit einem Freiheitsgrad geworden, das mit seiner ausführlichen Bibliographie schon weitgehend Handbuchcharakter im besten Sinne des Wortes hat und damit einem wirklichen Bedürfnis entgegenkommt.

Sehr ausführlich wird der Schwinger mit gerader Kennlinie unter den verschiedensten Stör- und Dämpfungskräften behandelt. Zwei weitere Kapitel sind den nichtlinearen (pseudoharmonischen) Schwingungen und eines den rheo-



linearen (quasiharmonischen) Schwinger gewidmet, während die selbsterregten Schwingungen nur kurz erwähnt werden. Ein besonderes Kapitel enthält die überarbeitete Fassung einer Schrift, die der Verfasser 1943 über Schwingungsmessung und -meßgeräte herausgegeben hat.

Das Buch zeichnet sich durch eine strenge Systematik, durch sorgfältige Begriffsbestimmungen und nicht zuletzt dadurch aus, daß der Stoff an einer großen Zahl von Beispielen illustriert und dem Leser nahegebracht wird. Wenn es Wünsche offenläßt, dann vor allem den, daß gelegentlich auch der lange erwartete zweite Band über Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad erscheinen möge.

*H. Ziegler*

**Negative Ions.** By H. S. W. MASSEY (Cambridge University Press, Cambridge 1950). 136 pp., 31 figs; £ -/12/6.

Dieses Bändchen der Serie «Cambridge Monographs on Physics» ist eine zweite, auf den neuesten Stand gebrachte Auflage einer 1937 erschienenen Monographie über negative Ionen. Der Autor beschränkt sich auf das Gebiet der eigentlichen negativen Atom- und Molekülionen, wie sie vorzugsweise in Gasen geringen Druckes auftreten, unter Ausschluß von komplexen Ionen und von flüssigen oder festen Medien. Mathematische Hilfsmittel werden sparsam verwendet, dafür sind die zugrunde liegenden physikalischen Vorgänge eingehend und klar dargestellt, ebenso die auf diesem Gebiet besonders schwierige Meßtechnik. Dieser Umstand mag, neben der geringen technischen Bedeutung, verantwortlich sein für die großen Lücken in der Kenntnis der negativen Ionen. Ihre erst kürzlich erkannte wichtige Rolle in der Sonnen- und Sternatmosphäre sowie der Ionosphäre wird im völlig umgearbeiteten letzten Kapitel erörtert. Die wichtigsten Arbeiten des Gebietes sind in einer Bibliographie zusammengestellt.

*W. Zünd*

**Differential Equations.** By H. B. PHILLIPS (John Wiley & Sons, New York 1951). 149 pp., \$3.00.

Der Autor behandelt in vier Kapiteln etwa das Pensum einer Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen für Ingenieure: 1. Separable Gleichungen erster Ordnung; 2. Andere Gleichungen erster Ordnung (insbesondere exakte und homogene Gleichungen); 3. Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung (insbesondere  $x$ -freie und andere integrable Typen); 4. Lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Zahlreiche Beispiele sind zur Erläuterung in den Text eingefügt, außerdem enthält jedes Kapitel eine reiche Auswahl von Übungsaufgaben. *H. Rutishauser*

**Synthesis of Electronic Computing and Control Circuits.** By the Staff of the Computation Laboratory (Harvard University Press, Cambridge, USA., 1951); 278 pp, 150 figs.; \$8.00.

Die Notwendigkeit eines geeigneten Kalküls als Hilfsmittel beim Entwurf von Schaltungen für elektronische digitale Rechengерäte und verwandte Anwendungen wird immer dringender; die bisherigen Publikationen geben aber größtenteils nur elementare Hinweise oder beschränken sich auf theoretische Studien.

Das vorliegende Werk (Band 27 der «Annals of the Computation Laboratory of Harvard University») beschreibt nun erstmals ein vollständig ausgearbeitetes, durch zahlreiche Beispiele erläutertes Verfahren zum Entwurf von Schaltungen, deren Verhalten in logistischer Form vorgeschrieben ist. Es handelt sich um das Problem, eine vorgegebene Funktion von mehreren Variablen elektrisch zu realisieren, wobei die Veränderlichen nur zwei verschiedene Werte annehmen können.

Die Verfasser (im wesentlichen H. H. AIKEN) führen nach einer Erläuterung der verwendeten elektrischen Grundelemente (Schaltungen mit Vakuumröhren) und ihrer Arbeitsweise in die Behandlung der Funktionen mit mehreren Variablen ein. Daraufhin wird ein mit «Minimizing» bezeichnetes, bemerkenswertes Verfahren angegeben, welches mit Hilfe vorbereiteter Tabellen die Möglichkeit gibt, eine gegebene Funktion mit minimalem Materialaufwand zu verwirklichen. In einem nächsten Abschnitt werden der sogenannte Flip-Flop (Trigger Pair) und verwandte Schaltungen in die Formalistik einbezogen, und es werden Möglichkeiten für die Einführung der Zeit als weitere Variable angedeutet. Nach einer Behandlung der verschiedenen Verfahren zur digitalen Darstellung von Zahlen wird schließlich das Problem des Multiplikators für zwei mehrstellige Zahlen als komplizierteste, systematisch noch zu lösende Aufgabe aufgegriffen und ausführlich behandelt. — Der Anhang gibt eine Tabelle sämtlicher möglicher Funktionen mit vier Variablen nebst ihrer Darstellung. — Durchwegs werden nicht nur die Schaltungen mit gittergesteuerten Röhren, sondern auch solche mit Gleichrichtern in Berücksichtigung gezogen. Dagegen ist der Anschluß an Anordnungen mit elektromagnetischen Relais nicht durchgeführt, obwohl die Verwendung des Kalküls auch dort von Nutzen wäre.

Das Werk ist offensichtlich aus praktischen Bedürfnissen entstanden und dementsprechend für praktische Verwendung bestens geeignet. Es kann jedem, der mit dem Entwurf digitaler elektronischer Schaltungen in Berührung kommt, als Handbuch empfohlen werden.

*A. P. Speiser*

**Grundriß der allgemeinen und physikalischen Chemie.** Von W. FEITKNECHT (Reinhardt-Verlag, Basel 1950). 302 S., 78 Abb.; sFr. 6.40.

Wenn der Verfasser dieses als Einführung gedachten Werkes im Vorwort der Erwartung Ausdruck gibt, daß es auch geeignet sein dürfte, älteren Chemikern den Zugang zu den neueren Entwicklungen der grundlegenden theoretischen Auffassungen ihres Fachgebietes zu erleichtern, sieht er, vor allem auch was die Bedürfnisfrage betrifft, sicher richtig. Auch bei Vertretern benachbarter Fachrichtungen wird das Buch Freunde finden. Vor allem wird aber der Chemiestudierende der ersten Semester den Feitknechtschen Grundriß mit Nutzen als ersten Zugang zur physikalischen Chemie zu Hilfe nehmen, denn bereits in den einführenden Chemievorlesungen ist ein volles Verständnis ohne einige Kenntnis der wichtigsten physikalisch-chemischen Gesetzmäßigkeiten nicht denkbar, während aber das systematische Studium der physikalischen Chemie in der Regel erst später einsetzt. Ein kurzes Buch, wie das vorliegende, konzentriert und doch leicht lesbar, noch nicht allzu beschwert mit dem mathematischen Apparat der größeren Darstellungen, kann hier vorzügliche Vorbereitungs- und Überbrückungsarbeit leisten.

Der Autor ist sich der Gefahren einer Grundrißdarstellung von so beschränktem Umfang voll bewußt, die darin liegen, daß den Formulierungen, vom Leser aus gesehen, nicht selten eine größere Allgemeinheit zuzukommen scheint, als vom Verfasser beabsichtigt sein kann, weil dieser es sich oft versagen muß, im Buche durch ausführliche «Randwert»-Betrachtungen die Gültigkeitsbereiche scharf abzugrenzen.

Es wird immer auch eine Ermessensfrage bleiben, wie weit man zugunsten einer kurzen und einfachen Darstellung auf «Schärfe» verzichten darf. Der Verfasser hat hier einen guten Blick für das Zweckmäßige und Tragbare. Trotzdem wird man nicht überall mit ihm einiggehen, wird in einzelnen Punkten doch eine größere Präzision fordern, so zum Beispiel auf S. 118 bezüglich der Bemerkung



über Entropie zu Formel 15; auf S. 127, Formel 5, wo man durch Verwendung von  $\Delta F^0$  statt  $\Delta F$  auf die Standardisierung der Drucke hingewiesen sehen möchte; auf der gleichen Seite 127, wo die Ableitung des Massenwirkungsgesetzes doch zu stark vereinfacht erscheint; im Abschnitt «Lösungen», wo man das Nernstsche Verteilungsgesetz vermißt; im Abschnitt «Chemische Kinetik», wo die Begriffe Ordnung und Molekularität noch schärfer abgegrenzt werden könnten.

Diese Aussetzungen können den Wert des Buches, das die wesentlichen Themen der klassischen physikalischen Chemie umfaßt, dazu aber überall moderne Ergebnisse der Thermodynamik, der Atom- und Molekularphysik eingearbeitet enthält, nicht beeinträchtigen.

G. Trümpler

**Theory of the Interior Ballistics of Guns.** By J. CORNER (John Wiley & Sons, Inc., New York 1950). 443 pp., 71 figs; \$8.00.

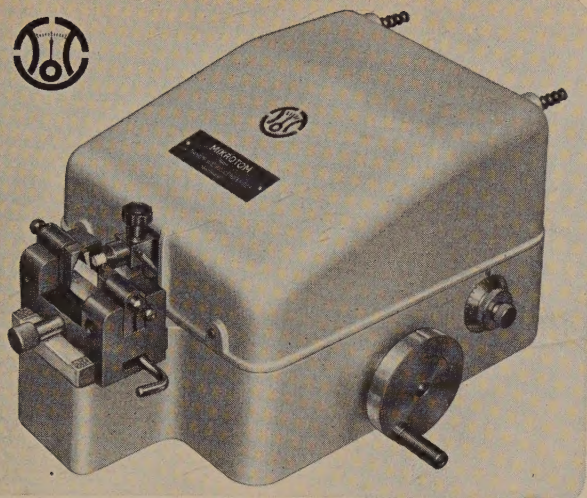
Die bekannten Lehrbücher über innere Ballistik von CRANZ und SUGOT stammen aus den Jahren 1926 und 1928 und orientieren über den damalige Stand der innern Ballistik. Das Geschütz wurde als einfache Wärmekraftmaschine betrachtet, und damit ließ sich das klassische Problem, bei gegebenen Geschütz- und Geschoßdaten und gegebener Ladung die Mündungsgeschwindigkeit sowie den maximalen Gasdruck zu berechnen, lösen. Seither wurden wesentlich neue Meßmethoden entwickelt, welche die Kompliziertheit der Vorgänge im Geschützrohr aufdeckten und die ursprünglichen Ideen auf den Stand empirischer Approximationen zurückführten. Neuerdings wird versucht, die Gasdynamik auf gewisse Probleme der innern Ballistik anzuwenden; vorläufig sind aber die Aussichten für die Anwendbarkeit der theoretischen Untersuchungen auf die Praxis noch sehr gering.

Es ist sehr zu begrüßen, daß Dr. CORNER, Research Scientist, British Ministry of Supply, ein neues Lehrbuch über die Theorie der innern Ballistik der Geschütze herausgegeben hat. Das vorliegende Buch stellt das nicht immer leicht zu überblickende Gebiet in zusammenhängender Form dar und vereinigt in glücklicher Weise das Beste der klassischen mit den neuen, für die innere Ballistik maßgebenden Methoden, wobei das Wesentliche veranschaulicht und im Detail diskutiert wird.

Das erste Kapitel enthält einen Überblick über die Probleme der inneren Ballistik, im zweiten werden die Treibmittel, deren Verbrennung und die Formfunktion behandelt, im dritten Kapitel die Thermochemie der Treibmittel. Im vierten Kapitel sind die einfachen innerballistischen Methoden erläutert, und an Beispielen wird gezeigt, was von diesen Methoden erwartet werden darf, während den eingehenderen Methoden, die mit den Namen CHARBONNIER und SUGOT verknüpft sind, das fünfte Kapitel gewidmet ist. Die Theorie der optimalen ballistischen Daten von Geschütz und Ladung ist im sechsten Kapitel zusammengestellt. Die innere Ballistik der neuen Geschütztypen, des rückstoßfreien Geschützes, der Hoch- und Niederdruckkanone und des konischen Laufes ist in den Kapiteln sieben und acht enthalten. Das neunte Kapitel ist dem hydrodynamischen Problem, das zehnte dem Wärmeübergang im Geschützrohr gewidmet.

Die absolut souveräne Beherrschung des Stoffes zieht sich wie ein roter Faden durch das ganze vorzügliche Buch. Das vorliegende Buch wird von jedem, der sich mit innerer Ballistik beschäftigt, mit größtem Gewinn studiert und muß bestens empfohlen werden.

W. Stutz



## DAS NEUE MIKROTOM FÜR DIE ELEKTRONEN- MIKROSKOPIE

erzeugt erstmals regelmäßige  
Schnittbänder von  $0,05-1 \mu$   
und ist unempfindlich gegen  
Erschütterungen.

### TRÜB, TÄUBER & CO. AG., ZÜRICH

Fabrik elektrischer Meßinstrumente und wissenschaftlicher Apparate

#### *Neuerscheinung*

ANDREAS SPEISER, Professor an der Universität Basel

### *Elemente der Philosophie und Mathematik*

Eine Anleitung zum inhaltlichen Denken

116 Seiten. Ganzleinen Fr. 11.45

1. Präludium. In diesem wird gezeigt, wie in der Philosophie eine Erfindungsmethode erforderlich ist und wie die Systematik seit Plato auf der Aufstellung und Ausdeutung einer Formel beruht.

2. Die Fuge. Im Anschluß an Hegels Logik als dem letzten und vollständigsten Versuch wird der von Fichte aufgestellte sechsteilige Operator vierstimmig durchgeführt. Vom Sein gelangt man über das Wesen zum Begriff. Es werden die Grundbegriffe der Philosophie und der Mathematik, in letzterer vor allem die Zahlen, daß Kontinuum, die Funktion, die Bewegung, in ersterer das Urteil und der Schluß sowie das Objekt durchkonstruiert.

Dieser kurze Leitfaden wendet sich an alle diejenigen, welche sich für die Grundlagen im weitesten Sinne interessieren, und er gibt eine Anleitung zur Technik des Denkens, die sich jeder aneignen soll, der sich mit diesen Fragen befaßt.

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



# Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

## Mathematik

- BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen, erscheint 1952  
 CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie in zwei Bänden Band I geb. Fr. 39.50  
 Band II geb. Fr. 27.05  
 CARATHÉODORY, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung, erscheint 1952.  
 DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen  
 Grundlagen der Laplace-Transformation . . . . . geb. Fr. 83.20  
 FINSLER, P.: Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen . . . . . geb. Fr. 15.40  
 FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes . . . . . geb. Fr. 24.95  
 HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie . . . . . geb. Fr. 17.—  
 HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände . . . . . geb. je Fr. 54.10  
 LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage 1951 . . . . . geb. Fr. 31.20  
 LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre An-  
 wendung . . . . . geb. Fr. 49.90  
 OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Diff.- u. Integralrechng., Band I geb. Fr. 56.15  
 Band II geb. Fr. 69.70  
 SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I . . . . . geb. Fr. 56.15  
 STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . . . geb. Fr. 29.65  
 VOELKER, D., DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transf. geb. Fr. 47.85  
 ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik . . . . . geb. Fr. 31.20

## Physik und Astronomie

- GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellen-  
 mechanik . . . . . geb. Fr. 33.30  
 NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Orts-  
 bestimmung. . . . . geb. Fr. 36.40  
 VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen geb. Fr. 39.50  
 WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik . . . . . geb. Fr. 49.40  
 WALDMEIER, M.: Tabellen zur heliographischen Ortsbestimmung . . . . . geb. Fr. 14.55  
 WALDMEIER, M.: Die Sonnenkorona, Band I . . . . . geb. Fr. 29.75  
 Kongreßbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik und theoretische  
 Physik, Basel 1949. 248 S. mit vielen Illustrationen. Broschiert Fr. 16.65

## Ingenieurwissenschaften

- BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert . . . . . Fr. 28.10  
 GOLDSTEIN, J.: Die Meßwandler, erscheint 1952.  
 JAEGER, CH.: Technische Hydraulik . . . . . geb. Fr. 52.—  
 KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge der Theorie der  
 Wechselströme und des einphasigen Transformators . . . . . geb. Fr. 27.55  
 Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen . . . . . geb. Fr. 79.05  
 MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der starren, flüssigen und  
 elastischen Körper . . . . . geb. Fr. 37.45  
 Band II: Dynamik der starren Körper . . . . . geb. Fr. 33.80  
 Band III: Dynamik der Systeme, erscheint 1951  
 MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene geb. Fr. 13.50  
 SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie . . . . . geb. Fr. 15.10  
 StrÖSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I . . . . . geb. Fr. 40.05  
 RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge . . . . . geb. Fr. 31.20  
 RICHTER, R.: Elektrische Maschinen, Band I . . . . . geb. Fr. 49.40

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



*Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten*  
*unsere Spezialität*

*Clichés*

SCHÜTZENMATTSTR. 31

**STEINER+CO**

**BASEL**



